MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

52. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 2. JUNI 1949)

QA1
M88
v. 52-53

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1949

Math.
Z.

Preis DMark 19.80

Die MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstr. 8 (Mathematisches Institut),
F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstr. 4.

52. Band. **Inhalt:** 1. Heft.

Seite

Nöbeling, Prof. Dr. G., Erlangen, Lammersstr. 5: Über die erste Randwertaufgabe bei regulären Variationsproblemen. II. (Abänderung der Randwerte) 1

Petersson, Prof. H., Hamburg 39, Sierichstr. 100: Über Weierstraßpunkte und die expliziten Darstellungen der automorphen Formen von reeller Dimension 32

Jehle, H., Weinheim (Bergstr.), Rosenbrunnenstr. 13: Eine Bemerkung zum Konvergenzkriterium von Weierstraß 60

Seifert, Prof. Dr. H., Heidelberg, Hauptstr. 49: Schlingknoten 62

Pickert, Doz. Dr. G., Tübingen, Math. Institut der Universität: Inseparable Körpererweiterungen 81

Über die erste Randwertaufgabe bei regulären Variationsproblemen. II.

(Abänderung der Randwerte.)

Von

G. Nöbeling in Erlangen.

§ 1.

Einleitung.

In einer ersten Arbeit mit dem gleichen Haupttitel[1]), die wir mit I zitieren und deren Definitionen und Sätze wir hier verwenden, haben wir eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß eine einzelne zugelassene Kurve R eine Kurve mit Lösung ist, d. h. daß für R die Randwertaufgabe I, (2), (5) eine Lösung besitzt.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit folgenden zwei ganz anders gearteten Fragen. Es sei R eine zugelassene Kurve mit Lösung. 1. Hat dann jede zugelassene Kurve, die aus R durch eine hinreichend kleine Änderung hervorgeht, ebenfalls eine Lösung? 2. Wie weit kann man diese Änderung treiben und welches ist der Grund, weshalb bei einer zu großen Änderung das Randwertproblem keine Lösung mehr hat?

Dabei beschränken wir uns nicht, wie sonst in diesem Zusammenhang üblich, auf Änderungen, die linear von einem Parameter abhängen ($r(x, y) = r_0(x, y) + \varepsilon r_1(x, y)$), sondern wir lassen beliebige Änderungen zu. Was heißt dann aber „kleine“ oder „große“ Änderung? Am einfachsten und zugleich umfassendsten ist es, wenn man einen Abstand zwischen zugelassenen Kurven einführt bzw. als eingeführt annimmt und kleine bzw. große Änderung im Sinne eines kleinen bzw. großen Abstandes der beiden Kurven voneinander interpretiert.

Die Frage 1 ist dann einfach mit Ja zu beantworten (Satz 1). Und die Antwort auf die Frage 2 lautet: Man kann so weit abändern, als das Variationsproblem noch einen Sinn hat (Satz 2).

Präzisieren wir nun diese Andeutungen!

Es sei $\mathfrak{R}$ ein System von zugelassenen Kurven R, also von Kurven des xyz-Raumes mit den Eigenschaften I, 1—5. Je zwei Kurven R_0 und R aus $\mathfrak{R}$ sei ein den üblichen drei Abstandsaxiomen genügender

[1]) Über die erste Randwertaufgabe bei regulären Variationsproblemen. I. (Existenz der Lösung.) Diese Zeitschrift, **51**, S. 712—751.

Abstand $\Delta(R_0, R)$ zugeordnet, welcher außerdem noch folgender *Bedingung* genügt: Ist R_0 eine Kurve aus $\mathfrak{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\varepsilon' = \varepsilon'(R_0, \varepsilon)$ derart, daß es für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon'$ eine topologische Abbildung τ von R_0 auf R gibt, für welche das Maximum $\bigtriangledown_\tau(R_0, R)$ der Abstände (im üblichen Sinne) der Punkte auf R_0 von ihren Bildpunkten auf R kleiner als ε ist[2].

Wir bezeichnen $\mathfrak{R}$ als *zugelassenen Kurvenraum*, wenn $\mathfrak{R}$ neben den Eigenschaften I, 1—5 und der Metrik Δ noch die folgende Eigenschaft 6 besitzt:

Eigenschaft 6. Zu jeder Kurve R_0 aus $\mathfrak{R}$ existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ derart, daß für alle Kurven R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_0$ die Zahlen r, c und d der Eigenschaften I, 4 und 5 gleichmäßig gewählt werden können: $r = r(R_0, \varepsilon_0)$, $c = c(R_0, \varepsilon_0)$, $d = d(R_0, \varepsilon_0)$[3].

Wir werden im § 5 Beispiele von zugelassenen Kurvenräumen angeben.

Nun sei $\mathfrak{R}$ ein zugelassener Kurvenraum. Wir behaupten erstens:

Satz 1. *Die Menge $\mathfrak{R}_1$ aller Kurven aus $\mathfrak{R}$ mit Lösungen ist offen in $\mathfrak{R}$.*

Es sei R eine Kurve mit einer Lösung $H(x, y)$. Dann existieren $H_x(x, y)$ und $H_y(x, y)$ überall in G und sind stetig[4]. Wir bezeichnen mit $d(R)$ die kleinste Zahl d, für welche die Steigung

$$\sqrt{H_x^2(x, y) + H_y^2(x, y)} \leqq d$$

in ganz G ist. Aus der Stetigkeit von H_x und H_y folgt, daß $d(R)$ gleich der unteren Grenze aller lokalen Dehnungsschranken von $H(x, y)$, also, da $H(x, y)$ in $\mathfrak{F}(\overline{G})$ liegt, $d(R) < D$ ist.

Wir behaupten nun zweitens:

Satz 2. *Konvergiert die Folge $\{R_i\}$ aus $\mathfrak{R}_1$ gegen eine Kurve R aus $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_1$, so konvergiert die Folge $\{d(R_i)\}$ gegen D.*

Der Satz 1 besagt, daß, wenn für eine Kurve R_0 aus $\mathfrak{R}$ das Randwertproblem I, (2), (5) eine Lösung hat, dasselbe gilt für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$, die von R_0 einen hinreichend kleinen Abstand $\Delta(R_0, R)$ hat. Die Behauptung des Satzes 2 kann folgendermaßen interpretiert werden: Für die Kurve R hat das Randwertproblem I, (2), (5) keine (in $\mathfrak{F}(\overline{G})$ liegende!) Lösung, weil die zu den R_i gehörenden Lösungen $H_i(x, y)$ an einzelnen Stellen (x_i, y_i) mit wachsendem i zu steil werden, d. h. weil für jedes i im Innern G_i des Definitionsbereiches $\overline{G}_i$ von $H_i(x, y)$

[2]) Diese Bedingung besagt, daß bei kleinem $\Delta(R_0, R)$ die Kurven R_0 und R sich nur wenig unterscheiden, d. h. auseinander durch eine kleine topologische Deformation hervorgehen (insbesondere bestehen dann R_0 und R aus gleich vielen Komponenten, die wegen Eigenschaft I, 1 einfach geschlossene Kurven sind).

[3]) Dies bedeutet, daß die Kurven R mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon$ *gleichmäßig* glatt sind.

[4]) C. R. Morrey jr., Transact. Amer. Math. Soc. **43** (1938), S. 126—166.

ein Punkt (x_i, y_i) existiert derart, daß die Folge der Punkte $\left(p_i = \frac{\partial}{\partial x} H_i(x_i, y_i),\ q_i = \frac{\partial}{\partial y} H_i(x_i, y_i)\right)$ der Kreisscheibe $p^2 + q^2 < D^2$ gegen die Peripherie dieser Kreisscheibe strebt, innerhalb welcher unser Variationsproblem überhaupt nur definiert und regulär ist.

§ 2.

Drei Sätze über zugelassene Kurvenräume.

Durch die Eigenschaft I, 3 gehört zu jeder Kurve R aus $\mathfrak{R}$ (mindestens) ein beschränktes Gebiet G der xy-Ebene, dessen Begrenzung G^* die Projektion K von G ist. Hierüber gilt folgender

Satz 3. *Das Gebiet G ist durch R eindeutig bestimmt. Ist R^0 eine Kurve aus $\mathfrak{R}$ und G^0 das zugehörige Gebiet, so existiert zu jedem hinreichend kleinen $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon$ gilt*

$$(1) \qquad (G^0 - G) + (G - G^0) \subset K^0(\delta) \,.\, K(\delta),$$

wobei $K^0(\delta)$ bzw. $K(\delta)$ die Menge aller Punkte mit Abständen $< \delta$ von K^0 bzw. K ist[5]).

Beweis. Da G beschränkt und zusammenhängend ist und die Begrenzung K hat, gilt bei geeigneter Numerierung der Komponenten $K_1, \ldots, K_m$ von K (einfach geschlossene Kurven) folgendes: $K_2, \ldots, K_m$ liegen im Innengebiet I_1 von K_1 und für jedes $i = 2, \ldots, m$ liegen $K_2, \ldots, K_{i-1}, K_{i+1}, \ldots, K_m$ im Außengebiet A_i von K_i. Es gilt daher $G = I_1 \,.\, A_2 \,.\, \ldots \,.\, A_m$. Insbesondere ist also G durch K eindeutig bestimmt: $G = G(K)$.

Nun sei eine Kurve R^0 aus $\mathfrak{R}$ (ihre Projektion heiße K^0 und das zugehörige Gebiet G^0) und ein $\delta > 0$ gegeben. Wir wählen δ sofort so klein, daß für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon$ die Anzahl der Komponenten gleich der Anzahl m der Komponenten von R^0 ist. Ist nun ε hinreichend klein, so gilt $K\left(\frac{\delta}{2}\right) \subset K^0(\delta)$ für jedes R mit $\Delta(R^0, R) < \varepsilon$ zufolge der Bedingung für Δ auf S. 2. Es genügt also zum Beweis von (1), die Beziehung $(G^0 - G) + (G - G^0) \subset K^0\left(\frac{\delta}{2}\right)$ zu beweisen. Ist nun δ hinreichend klein, so liegt jeder Punkt mit einem Abstand $\geqq \frac{\delta}{2}$ von K^0 dann und nur dann in A_i bzw. I_1, wenn er in A_i^0 bzw. I_1^0 liegt (bei geeigneter Numerierung der A_i). Also gilt:

$$(A_i^0 - A_i) + (A_i - A_i^0) + (I_1^0 - I_1) + (I_1 - I_1^0) \subset K^0\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

[5]) Für eine beliebige Menge P und ein beliebiges $\delta > 0$ bezeichnen wir mit $P(\delta)$ die Menge aller Punkte mit Abständen $< \delta$ von P. Die Menge $P(\delta)$ ist offen und enthält $\overline{P}$. Wir nennen $P(\delta)$ die δ-Umgebung von P.

Wegen

$$G^0 - G = I_1^0 A_2^0 \dots A_m^0 - I_1 A_2 \dots A_m \subset (I_1^0 - I_1) + (A_2^0 - A_2) + \dots + (A_m^0 - A_m$$

$$G - G^0 = I_1 A_2 \dots A_m - I_1^0 A_2^0 \dots A_m^0 \subset (I_1 - I_1^0) + (A_2 - A_2^0) + \dots + (A_m - A_m^0$$

gilt also

$$G^0 - G \subset K^0\left(\frac{\delta}{2}\right) \text{ und } G - G^0 \subset K^0\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Damit ist (1) bewiesen.

Satz 4. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein zugelassener Kurvenraum und R_0 eine Kurve aus $\mathfrak{R}$. Dann existieren vier positive Zahlen ε, r, c und $d < D$ [6]) sowie zu jeder Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon$ eine in sich kompakte Menge $\mathfrak{L}(\mathfrak{R})$ von Kreisen L der xy-Ebene und zwei in sich kompakte Mengen $\tilde{\mathfrak{K}}(R)$ und $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ von Kugeln $\tilde{K}$ bzw. $\underset{\sim}{K}$ derart, daß folgendes gilt:*

α) jeder Punkt der Projektion K von R liegt auf mindestens einem Kreis L aus $\mathfrak{L}(R)$;

β) jeder Kreis L aus $\mathfrak{L}(R)$ hat mit K genau einen Punkt (X, Y) gemein;

γ) jeder Kreis L aus $\mathfrak{L}(R)$ ist fremd zu G und umschließt G nicht;

α') in jedem Punkt von R wird R durch mindestens eine Kugel $\tilde{K}$ bzw. K aus $\tilde{\mathfrak{K}}(R)$ bzw. $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ von oben bzw. unten berührt;

β') jede Kugel $\tilde{K}$ aus $\tilde{\mathfrak{K}}(R)$ bzw. $\underset{\sim}{K}$ aus $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ hat mit R genau einen Punkt gemein und berührt R dort von oben bzw. unten;

γ') jede Kugel $\tilde{K}$ aus $\tilde{\mathfrak{K}}(R)$ bzw. $\underset{\sim}{K}$ aus $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ hat im Berührungspunkt mit R eine Steigung $\leqq d$.

δ) Es sei $T(R)$ die Menge aller Zahlen-9-Tupel $t = (X, Y, Z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta}, X^1, Y^1)$ derart, daß $(X, Y, Z) \in R$, $L(X, Y, X^1, Y^1) \in \mathfrak{L}(R)$, $\tilde{K}(X, Y, Z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \tilde{\mathfrak{K}}(R)$, $\underset{\sim}{K}(X, Y, Z, \underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta}) \in \underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ [7]); dann existiert zu jedem $\sigma > 0$ ein $\varepsilon' = \varepsilon'(\sigma) \leqq \varepsilon$ derart, daß es bei beliebigem $R \in \mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon'$ zu jedem $t \in T(R)$ ein $t_0 = (X_0, \dots, Y_0^1) \in T(R_0)$ gibt mit $|X_0 - X| < \sigma, \dots, |Y_0^1 - Y^1| < \sigma$.

Beweis. Es sei K die Projektion der Kurve R aus $\mathfrak{R}$ und G das von K begrenzte beschränkte Gebiet. Nach Eigenschaft I, 4 und 6 ist K bei hinreichend kleinem $\Delta(R_0, R)$ auf der Seite G stumpf von einem Grade $r' > 0$ (r' unabhängig von R); dabei können und

---

[6]) Genauer: ε, r und c können als beliebig kleine positive Zahlen und d kann als beliebig große positive Zahl $< D$ gewählt werden.

[7]) $L(X, Y, X^1, Y^1)$ sei der Kreis durch (X, Y) um (X^1, Y^1). Mit $\tilde{K}(X, Y, Z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ bezeichnen wir allgemein eine Kugel mit der Eigenschaft, daß der Punkt (X, Y, Z) auf der unteren Hälfte $z = U(x, y)$ dieser Kugel liegt und $\frac{\partial U}{\partial x}(X, Y) = \tilde{\alpha}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}(X, Y) = \tilde{\beta}$ ist.

wollen wir sofort r' so klein annehmen, daß kein Kreis mit dem Radius r' das Gebiet G umschließt. Es sei $\mathfrak{L}'(R)$ die Menge aller Kreise L' mit dem Radius r', welche zu G fremd sind, zu K jedoch nicht. Diese Menge $\mathfrak{L}'(R)$ ist in sich kompakt, jeder Punkt von K liegt auf mindestens einem Kreis aus $\mathfrak{L}'(R)$, jeder Kreis aus $\mathfrak{L}'(R)$ ist fremd zu G und umschließt G nicht. Nun sei r eine feste Zahl mit $0 < r < r'$. Ist L' ein beliebiger Kreis von $\mathfrak{L}'(R)$, so zeichnen wir durch jeden Punkt von KL' den Kreis L mit dem Radius r, welcher L' in diesem Punkt von innen berührt. Dies machen wir für jeden Kreis L' aus $\mathfrak{L}'(R)$. Die so entstehende Menge $\mathfrak{L}(R)$ von Kreisen L hat die Eigenschaften $\alpha) - \gamma)$. — Analog zeigt man die Existenz von $\tilde{\mathfrak{K}}(R)$ und $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ mit Hilfe der Menge $\tilde{\mathfrak{K}}'(R)$ bzw. $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}'(R)$ aller Kugeln mit einem Radius c', welche R in (mindestens) einem Punkt berühren und dort eine Steigung $\leqq d$ haben, wobei c' und d gemäß Eigenschaft I, 5 und 6 (von R mit hinreichend kleinem $\Delta(R_0, R)$ unabhängig) gewählt sind. — δ) beweist man nun leicht indirekt.

Satz 5. *Ist $d \geqq d(R_0, \varepsilon_0)$*[8]) *eine globale Dehnungsschranke der zugelassenen Kurve R_0 und $\delta > 0$, so ist $d + \delta$ eine globale Dehnungsschranke für jede zugelassene Kurve R mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon$ bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$.*

Beweis. Angenommen, diese Behauptung wäre falsch. Dann existiert eine Folge von zulässigen Kurven $R_1, R_2, \ldots$ mit $\lim \Delta(R_0, R_i) = 0$ und auf jedem R_i ein Punktepaar $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, z_1^{(i)})$, $(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}, z_2^{(i)})$ mit

$$|z_1^{(i)} - z_2^{(i)}| > (d+\delta)\sqrt{(x_1^{(i)} - x_3^{(i)})^2 + (y_1^{(i)} - y_2^{(i)})^2}. \tag{2}$$

Indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge übergehen, können wir sofort annehmen, daß die Folge $\{(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, z_1^{(i)})\}$ gegen einen Punkt $(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, z_1^{(0)})$ und $\{(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}, z_2^{(i)})\}$ gegen einen Punkt $(x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, z_2^{(0)})$ von R_0 konvergiert. Nun ist sicher nicht $(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, z_1^{(0)}) \neq (x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, z_2^{(0)})$; denn wegen (2) wäre dann

$$|z_1^{(0)} - z_2^{(0)}| \geqq (d+\delta)\sqrt{(x_1^{(0)} - x_2^{(0)})^2 + (y_1^{(0)} - y_2^{(0)})^2}$$

und dies würde bedeuten, daß R_0 nicht die Dehnungsschranke d hat. Also sind $(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, z_1^{(0)})$ und $(x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, z_2^{(0)})$ gleich einem Punkt $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$. Für hinreichend große i sind $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, z_1^{(i)})$ und $(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}, z_2^{(i)})$ beliebig benachbart. Wegen (2) und $d \geqq d(R_0, \varepsilon_0)$ liegt also für hinreichend großes i der Punkt $(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}, z_2^{(i)})$ nicht, wie es nach unserer Definition der Berührung (I, S. 715) sein müßte, auf oder unterhalb bzw. oberhalb der die Kurve R im Punkt $(x_1^{(i)}, y^{(i)}, z_1^{(i)})$ von oben bzw. von berührenden Kugel mit dem Radius $c(R_0, \varepsilon_0)$ und der Steigung $\leqq d(R_0, \varepsilon_0)$ im Punkt $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, z_1^{(i)})$, die nach Eigenschaft I, 5 bzw. 6 existiert. Damit ist der gesuchte Widerspruch gefunden und der Satz 5 bewiesen.

[8]) Zur Definition von $d(R_0, \varepsilon_0)$ vgl. die Eigenschaft 6.

§ 3.

Beweis des Satzes 1.

Es sei also R_0 eine Kurve aus $\mathfrak{R}$, für welche das Randwertproblem I, (2), (5) eine Lösung $H_0(x, y)$ besitzt. Wir haben zu zeigen, daß es auch eine Lösung $H(x, y)$ besitzt, für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit hinreichend kleinem Abstand $\Delta(R_0, R)$ von R_0.

Es sei K_0 die Projektion von R_0 in die xy-Ebene und G_0 das beschränkte Gebiet mit der Begrenzung K_0 (Eigenschaft I, 3). Da $H_0(x, y)$ in $\overline{G}_0$ eine lokale Dehnungsschranke $d < D$ hat, ergibt die Anwendung des Überdeckungssatzes von HEINE-BOREL endlich viele offene, $\overline{G}_0$ überdeckende Mengen $U_1, \ldots, U_k$ derart, daß H_0 in $\overline{G}_0 U_i$ die Dehnungsschranke d hat. Dann existiert ein $\delta_0 > 0$ derart, daß die Kreisscheibe um einen jeden Punkt von $\overline{G}_0$ mit einem Durchmesser $< \delta_0$ in mindestens einer Menge U_i enthalten ist. Daher ist $d^{\delta_0}(H_0, \overline{G}_0) \leqq d$. Wir setzen

$$d^{\delta_0}(H_0, \overline{G}_0) = d_0. \tag{3}$$

Gemäß Satz 4 wählen wir vier positive Zahlen ε_1, r, c und d_1 mit $d_0 < d_1 < D$ so, daß für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_1$ eine in sich kompakte Menge $\mathfrak{L}(R)$ von Kreisen der xy-Ebene mit dem Radius r existiert, für welche $\alpha)-\gamma)$ gilt, sowie zwei in sich kompakte Mengen $\mathfrak{K}(R)$ und $\mathfrak{K}(R)$ von Kugeln mit dem Radius c, für welche $\alpha')-\gamma')$ (mit d_1 statt d) gilt. Wir wählen weiter vier Zahlen d_2, d_3, d_4 und d_5 derart, daß

$$d_0 < d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < D \tag{4}$$

ist.

Nun sei R eine zunächst beliebige Kurve aus $\mathfrak{R}$, K ihre Projektion in die xy-Ebene und G das von K begrenzte beschränkte Gebiet. $\delta > 0$ sei zunächst beliebig. Mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(R, \delta)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller derjenigen Funktionen $h(x, y)$ mit dem Definitionsbereich G, für welche $d^{\delta}(h, \overline{G}) \leqq d_5$ und der Rand der Fläche $z = h(x, y)$ gleich R ist (im Sinne von I, (5)). *Angenommen erstens, es sei bereits bewiesen, daß $\mathfrak{H}$ nicht leer ist wenigstens dann, wenn $\Delta(R_0, R)$ und δ hinreichend klein sind.*

Die untere Grenze der Integrale $I[h(x, y), G]$ für alle Funktionen $h(x, y)$ aus $\mathfrak{H}$ heiße u. Aus Gliedern von $\mathfrak{H}$ können wir eine Folge $\{h_n(x, y)\}$ bilden derart, daß $\lim I[h_n, G] = u$ ist. Nach I, Satz 10 [9]) können wir also die Folge $\{h_n(x, y)\}$ auf $\overline{G}$ als gleichmäßig konvergent annehmen. Die Grenzfunktion $\lim h_n(x, y) = H(x, y)$ liegt in $\mathfrak{H}$, so daß also $I[H, G] \geqq u$ ist. Wegen der Halbstetigkeit [10]) $I[H, G] \leqq \lim I[h_n, G]$ ist $I[H, G] \leqq u$. Also gilt $I[H, G] = u$.

[9]) vgl. auch I, S. 749, achte Zeile von unten.

[10]) T. RADÓ, Math. Ann. **101** (1929) S. 626. Vgl. auch I, Fußnote [17]).

Wir behaupten, daß die Grenzfunktion $H(x, y)$ eine Lösung des Randwertproblems I, (2), (5) für die Kurve R ist, falls $\Delta(R_0, R)$ und δ hinreichend klein sind.

Es sei also $h(x, y)$ irgendeine Funktion aus $\mathfrak{F}(\bar{G})$, die auf K mit $H(x, y)$ identisch ist, in G jedoch nicht. Wir haben die Ungleichung $I[H, G] < I[h, G]$ zu beweisen. Wir können diese Ungleichung auch in der Form $f(0) < f(1)$ schreiben, wenn wir $f(\Theta) = I[H + \Theta(h - H), G]$ setzen für $0 \leqq \Theta \leqq 1$. *Angenommen zweitens, wir hätten bereits bewiesen, daß* $d^0(H, \bar{G}, \bar{G}) \leqq d_4$ *gilt, falls* $\Delta(R_0, R)$ *und* δ *hinreichend klein sind.* Nun ist mit h und H auch $h - H$ lokal und folglich (vgl. I, S. 749) auch global dehnungsbeschränkt. Daher gilt für jedes hinreichend kleine $\Theta \geqq 0$ die Ungleichung $d^0(H + \Theta(h - H), \bar{G}) \leqq d_5$ wegen $d_4 < d_5$, d. h. für jedes hinreichend kleine $\Theta \geqq 0$ liegt $H + \Theta(h - H)$ in $\mathfrak{H}$. Für jedes solche Θ gilt also $f(\Theta) \geqq f(0) = u$. Mithin hat $f(\Theta)$ an der Stelle $\Theta = 0$ ein relatives Minimum. Wegen $f''(\Theta) > 0$ $(0 \leqq \Theta \leqq 1)$ (I, S. 732) ist dieses relative Minimum sogar ein absolutes Minimum, d. h. es ist $f(0) < f(\Theta)$ für $0 < \Theta \leqq 1$, insbesondere also $f(0) < f(1)$, w. z. z. w.[11]).

Erstens müssen wir jetzt noch beweisen, daß $\mathfrak{H}$ nicht leer ist, wenn $\Delta(R_0, R)$ und δ hinreichend klein sind.

Es sei $R = [(x, y) \in K,\ z = r(x, y)]$ eine Kurve aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_1$. Da jede Kugel $\tilde{K}$ aus $\tilde{\mathfrak{K}}(R)$ und $\underset{\sim}{K}$ aus $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ im Berührungspunkt mit R eine Steigung $\leqq d_1$ hat (S. 6), existiert ein von R unabhängiges $\varrho > 0$ derart, daß

$$d'^{\varrho}(r, K) \leqq d_2 \tag{5}$$

ist. Wir wählen dieses ϱ sofort so klein, daß

$$2\varrho \leqq \delta_0 \tag{6}$$

ist. Wegen (3) und (4) ist dann

$$d^{2\varrho}(H_0, \bar{G}_0) \leqq d_2. \tag{7}$$

Ist (x_1, y_1) ein beliebiger Punkt von K und τ eine feste Zahl $> d_2$, so setzen wir auf der Kreisscheibe $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leqq \varrho^2$

$$k^+(x, y, x_1, y_1, \tau) \equiv r(x_1, y_1) + \tau \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

und

$$k^-(x, y, x_1, y_1, \tau) \equiv r(x_1, y_1) - \tau \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}.$$

Die beiden Flächen $z = k^+(x, y, x_1, y_1, \tau)$ und $z = k^-(x, y, x_1, y_1, \tau)$ sind dann Stücke des Kreiskegels mit der Spitze im Punkt $(x_1, y_1, r(x_1, y_1))$ von R, der Achse parallel zur z-Achse und der Steigung τ. In jedem Punkt (x, y) der Menge $\overline{K(\varrho)}$ aller Punkte der xy-Ebene,

[11]) Vgl. zu diesem Beweis A. Haar, Math. Ann. **97** (1917) S. 124—158 und Hamburger Abhandlungen, **8** (1931) S. 1—31, sowie I, Beweis des Satzes 1.

die von K Abstände $\leqq \varrho$ haben, setzen wir

$$(8)\qquad \begin{cases} f^+(x,y) = f^+(x,y,R,\tau) = \operatorname{Min} k^+(x,y,x_1,y_1,\tau) \\ f^-(x,y) = f^-(x,y,R,\tau) = \operatorname{Max} k^-(x,y,x_1,y_1,\tau), \end{cases}$$

wobei das Minimum und Maximum gebildet wird über alle Punkte (x_1, y_1) von K mit Abständen $\leqq \varrho$ von (x, y), also über alle Punkte (x_1, y_1), für welche $k^+(x, y, x_1, y_1, \tau)$ und $k^-(x, y, x_1, y_1, \tau)$ überhaupt definiert sind. Nach (5) und wegen $\tau > d_2$ gilt

$$(9)\qquad f^+(x,y,R,\tau) = f^-(x,y,R,\tau) = r(x,y) \text{ auf } K.$$

Wir behaupten, daß die Funktionen $f^+(x, y)$ und $f^-(x, y)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von K die lokale Dehnungsschranke τ haben; genauer behaupten wir (11).

Zum Beweis sei n eine so große natürliche Zahl, daß

$$\frac{n-2}{n+1} > \frac{d_2}{d_3}$$

gilt. Ist nun (x, y) ein beliebiger Punkt, dessen Abstand von K, also von einem Punkt (x_1', y_1') von K höchstens gleich $\frac{\varrho}{n}$ ist, so betrachten wir einen beliebigen Punkt (x_1, y_1) von K, dessen Abstand von (x, y) größer als $\frac{n-1}{n}\varrho$, jedoch höchstens gleich ϱ ist, falls es einen solchen Punkt überhaupt gibt. Dann gilt, weil die Funktion k^+ die Steigung τ hat und (5) gilt.

$$\begin{aligned} & k^+(x,y,x_1,y_1,\tau) - k^+(x,y,x_1',y_1',\tau) \\ = {} & k^+(x,y,x_1,y_1,\tau) - k^+(x_1,y_1,x_1,y_1,\tau) + r(x_1,y_1) - r(x_1',y_1') \\ + {} & k^+(x_1',y_1',x_1',y_1',\tau) - k^+(x,y,x_1',y_1',\tau) \\ \geqq {} & \frac{n-1}{n}\varrho\tau - \frac{n+1}{n}\varrho d_2 - \frac{1}{n}\varrho\tau = \frac{n-2}{n}\varrho\tau - \frac{n+1}{n}\varrho d_2 > 0. \end{aligned}$$

Also gilt die Bemerkung: Für jeden Punkt (x, y) mit einem Abstand $\leqq \frac{\varrho}{n}$ von K genügt es, in der Definition (8) von $f^+(x, y)$ den Punkt (x_1, y_1) alle Punkte von K mit Abständen $\leqq \frac{n-1}{n}\varrho$ von (x, y) durchlaufen zu lassen, man gelangt dabei zu derselben Funktion $f^+(x, y)$.

Ist also (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt der Menge $\overline{K(\delta)}$ aller Punkte der xy-Ebene, die von K Abstände $\leqq$

$$(10)\qquad \delta \leqq \delta_1 = \frac{\varrho}{2n}$$

haben, ist weiter M_0 die Menge aller Punkte aus $K(\delta)$ mit Abständen $\leqq \delta$ von (x_0, y_0), so können wir $f^+(x, y)$ auf M_0 durch (8) definieren, wobei (x_1, y_1) alle Punkte von K durchläuft mit Abständen $\leqq \frac{2n-1}{2n}\varrho$ von (x_0, y_0). Die zu diesen Punkten (x_1, y_1) gehörigen Funktionen $k^+(x, y, x_1, y_1, \tau)$ sind dann in ganz M_0 definiert, da M_0 für jeden

solchen Punkt (x_1, y_1) in der Kreisscheibe um (x_1, y_1) mit dem Radius ϱ liegt. Nun hat aber das Infimum (ebenso das Supremum) eines endlichen oder unendlichen Systems von Funktionen mit gleichem Definitionsbereich M_0 und derselben Dehnungsschranke τ in M_0 ebenfalls die Dehnungsschranke τ in M_0. Also gilt für f^+ und analog für

$$f^- = f^-(x, y, R, \tau)$$

die behauptete Beziehung

$$d^\delta(f^+, \overline{K(\delta)}) \leqq \tau, \quad d^\delta(f^-, \overline{K}(\delta)) \leqq \tau. \tag{11}$$

Für die Menge $K(\delta)$, zu der wir soeben geführt worden sind, gilt

$$\overline{G} - K(\delta) \subset G_0, \quad \overline{G} \subset G_0(\delta), \tag{12}$$

wenn $\Delta(R_0, R)$ hinreichend klein ist, etwa $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_2(\delta) \leqq \varepsilon_1$. Dies folgt unmittelbar aus dem Satz 3.

Wir betrachten nun die Funktionen $f^+(x, y, R, d_4)$ und $f^-(x, y, R, d_4)$, jedoch nur auf der Menge K' aller Punkte von G mit dem Abstand δ von K. Wir behaupten für $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_2(\delta)$, falls $\varepsilon_2(\delta)$ hinreichend klein ist:

$$f^-(x, y, R, d_4) < H_0(x, y) < f^+(x, y, R, d_4) \text{ auf } K'. \tag{13}$$

Dies ergibt sich folgendermaßen. Ist (x, y) ein Punkt der Menge K_0' aller Punkte von G_0 mit dem Abstand δ von K_0, so ist[12])

$$k_0^+(x, y, x_1, y_1, d_4) - H_0(x, y) = k_0^+(x, y, x_1, y_1, d_4) - k_0^+(x_1, y_1, x_1, y_1, d_4)$$
$$+ H_0(x_1, y_1) - H_0(x, y) \geqq (d_4 - d_2)\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \geqq (d_4 - d_2)\,\delta$$

für jeden Punkt (x_1, y_1) aus K_0 mit einem Abstand $\leqq \varrho$ von (x, y), da $k_0^+(x_1, y_1, x_1, y_1, d_4) = r_0(x_1, y_1) = H_0(x_1, y_1)$ ist und $k_0^+(x, y, x_1, y_1, d_4)$ die Steigung d_4 hat, während $d^\delta(H_0, \overline{G}_0) \leqq d_2$ ist wegen (7) und (10). Mithin ist auch

$$f^+(x, y, R_0, d_4) - H_0(x, y) \geqq (d_4 - d_2)\,\delta \text{ auf } K_0'.$$

Nun sind einerseits $f^+(x, y, R_0, d_4)$ und $H_0(x, y)$ als lokal dehnungsbeschränkte Funktionen stetig; bei hinreichend kleinem $\Delta(R_0, R)$ liegt anderseits K in einer beliebig kleinen Umgebung von K_0 (siehe die Bedingung für Δ auf S. 2) und daher K_0' in einer beliebig kleinen Umgebung von K' (vgl. auch den Satz 3). Ist also $\varepsilon_2(\delta)$ hinreichend klein, so gilt für $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_2(\delta)$:

$$f^+(x, y, R_0, d_4) - H_0(x, y) \geqq (d_4 - d_2)\frac{2\delta}{3} \text{ für jedes } (x, y) \in K'. \tag{14}$$

Es sei nun (x, y) ein Punkt von K'. Nach der Bemerkung von S. 8 existiert in K ein Punkt (x_1, y_1) mit einem Abstand $\leqq \frac{n-1}{n}\varrho$ von

[12]) $k_0^+(x, y, x_1, y_1, \tau)$ ist die Funktion $k^+(x, y, x_1, y_1, \tau)$ für $K = K_0$ und $r(x, y) = r_0(x, y)$ (es ist $[(x, y) \in K_0,\ z = r_0(x, y)]$ die Kurve R_0), also $f^+(x, y, R_0, d_4) = \operatorname{Min} k_0^+(x, y, x_1, y_1, d_4)$.

(x, y) derart, daß $f^+(x, y, R, d_4) = k^+(x, y, x_1, y_1, d_4)$ ist. Ist $\varepsilon_2(\delta)$ hinreichend klein, so existiert, falls $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_2(\delta)$ ist, auf K_0 ein Punkt (x_0, y_0) mit einem Abstand $\leqq \frac{\varrho}{n}$ von (x_1, y_1) derart, daß

$$|k^+(x, y, x_1, y_1, d_4) - k_0^+(x, y, x_0, y_0, d_4)| \leqq (d_4 - d_2)\frac{\delta}{3},$$

also

$$|f^+(x, y, R, d_4) - k_0^+(x, y, x_0, y_0, d_4)| \leqq (d_4 - d_2)\frac{\delta}{3}$$

und daher $f^+(x, y, R, d_4) \geqq k_0^+(x, y, x_0, y_0, d_4) - (d_4 - d_2)\frac{\delta}{3}$. Nun ist $k_0^+(x, y, x_0, y_0, d_4) \geqq f^+(x, y, R_0, d_4)$ nach (8). Also gilt $f^+(x, y, R, d_4) \geqq f^+(x, y, R_0, d_4) - (d_4 - d_2)\frac{\delta}{3}$. Dies und (13) ergibt $f^+(x, y, R, d_4) - H_0(x, y) \geqq (d_4 - d_2)\frac{\delta}{3}$, also $H_0(x, y) < f^+(x, y, R, d_4)$ für $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_2(\delta)$. Analog ergibt sich die erste Hälfte von (13).

Wir setzen nun die Funktion $H_0(x, y)$ fort zu einer Funktion $H_0^*(x, y)$, die nicht nur auf $\overline{G}_0$ (dem Definitionsbereich von $H_0(x, y)$) definiert ist, sondern auf der Menge $G_0(\delta) = G_0 + K_0(\delta)$ aller Punkte der Ebene mit Abständen $\leqq \delta$ von G_0, indem wir setzen:

$$(15) \qquad H_0^*(x, y) = \begin{cases} H_0(x, y) \text{ für } (x, y) \in \overline{G}_0 \\ f^+(x, y, R_0, d_3) \text{ für } (x, y) \in \overline{G_0(\delta)} - G_0. \end{cases}$$

Dann gilt, da $\delta < 2\varrho$ ist wegen (10), wegen (7) und (4) die Ungleichung $d^\delta(H_0, \overline{G}_0) \leqq d_3$; anderseits gilt nach (11) für die Funktion $f^+ = f^+(x, y, R_0, d_3)$ die Ungleichung $d^\delta(f^+, \overline{K_0(\delta)}) \leqq d_3$; also ist nach I. Satz 11

$$(16) \qquad d^\delta(H_0^*, \overline{G_0(\delta)}) \leqq d_3.$$

Nun sei R eine Kurve aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_2(\delta)$ (also $z = r(x, y)$ mit $(x, y) \in K$, wobei K die Projektion von R ist). Wir definieren die gesuchte Funktion $h(x, y)$ aus $\mathfrak{H}$ folgendermaßen:

$$(17)\ h(x, y) = \begin{cases} H_0(x, y) \text{ für } (x, y) \in \overline{G} - K(\delta), \\ \text{der mittleren der Zahlen } f^-(x, y, R, d_4), \\ f^+(x, y, R, d_4) \text{ und } H_0^*(x, y) \text{ für } (x, y) \in \overline{G} - \overline{K(\delta)}\ ^{13}). \end{cases}$$

Dazu ist zu bemerken 1. die Menge $G - K(\delta)$ ist nach (12) in G_0 enthalten, also $H_0(x, y)$ auf dieser Menge definiert; 2. $\overline{G}.K(\delta)$ ist nach (12) in $G_0(\delta)$ enthalten, also $H_0^*(x, y)$ auf dieser Menge definiert und die Funktionen f^- und f^+ sind nach (8) in $K(\delta)$, wegen (10) also auch in $\overline{G}.K(\delta)$ definiert; 3. für $(x, y) \in (G - K(\delta)).(\overline{G}.K(\delta)) \subset G_0.K'$ ist $H_0(x, y) = H_0^*(x, y)$ nach (15) und gleich der mittleren der drei Zahlen f^-, f^+ und H_0^* nach (13). Also ist $h(x, y)$ in $\overline{G}$ eindeutig definiert.

[13]) Sind a, b und c drei Zahlen mit $a \leqq b \leqq c$, so nennen wir b die mittlere.

Wir behaupten, daß $h(x, y)$ in $\mathfrak{H}$ liegt. Erstens ist $h(x, y) = r(x, y)$ auf K, d. h. die Fläche $z = h(x, y)$ hat die Kurve R zum Rand. Denn es gilt $K \subset G\,\overline{K(\delta)}$ und $f^-(x, y, R, d_4) = f^+(x, y, R, d_4) = r(x, y)$ nach (4) für $(x, y) \in K$, so daß die mittlere der drei Zahlen $f^-(x, y, R, d_4)$, $f^+(x, y, R, d_4)$, $H_0^*(x, y)$ gleich $r(x, y)$ ist. Zweitens behaupten wir $d^0(h, G) \leqq d_4$. Nach I, Satz 11 (mit G statt A und $G - \overline{K(\delta)}$ statt G_0 genügt es,

$$d^0(h, G - K(\delta)) \leqq d_4 \quad \text{und} \quad d^0(h, \bar{G}\,.\,\overline{K(\delta)}) \leqq d_4$$

zu beweisen. Nun ist $h(x, y) = H_0(x, y)$ auf $G - K(\delta)$ nach (8); und da $G - K(\delta) \subset G_0$ ist und (8) sowie $\delta \leqq 2\varrho$ gilt nach (10), so folgt $d^0(h, G - K(\delta)) \leqq d_2 < d_4$. Zum Beweis der Ungleichung $d^0(h, \bar{G}\,\overline{K(\delta)}) \leqq d_4$ seien (x_0, y_0) und (x_1, y_1) zwei Punkte der Menge $\bar{G}\,\overline{K(\delta)}$ mit einem Abstand $\leqq \sigma$ voneinander. Wir haben zu zeigen:

$$|h(x_0, y_0) - h(x_1, y_1)| \leqq d_4 \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}. \tag{18}$$

Hat h in den Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) dieselben Werte wie eine und dieselbe der Funktionen $f^-(x, y, R, d_4)$, $f^+(x, y, R, d_4)$, $H_0(x, y)$, so folgt (18) aus (11) mit $\tau = d_4$ bzw. (7), (10) und (4).

Nun sei beispielsweise $h(x_0, y_0) = f^-(x_0, y_0, R, d_4)$ und $h(x_1, y_1) = H_0^*(x_1, y_1)$. Da h gleich der mittleren der drei Zahlen f^-, f^+ und H_0^* ist, so ist also $h(x, y)$ in den Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) gleich der Funktion $g(x, y) = \operatorname{Max}(f^-(x, y, R, d_4),\ H_0^*((x, y))$ $((x, y) \in \bar{G}\,\overline{K(\delta)})$. Nun ist aber $d^0(g, \bar{G}\,\overline{K(\delta)}) \leqq d_4$ wegen (11) mit $\tau = d_4$, (16) und (12). Hieraus folgt (18). Genau so schließt man für die anderen Möglichkeiten von Werten für $h(x_0, y_0)$ und $h(x_1, y_1)$.

Also liegt $h(x, y)$ in $\mathfrak{H}$, wenn $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_2(\delta)$ und $\delta \leqq \delta_1$ ist, was wir ab jetzt voraussetzen[14]). Dann ist also $\mathfrak{H}$ nicht leer und insbesondere existiert die Grenzfunktion $H(x, y)$.

Zweitens müssen wir noch zeigen, daß $d^0(H, G) \leqq d_4$ ist, falls $\Delta(R_0, R)$ und δ hinreichend klein sind.

Nach der Definition der Funktion $H(x, y)$ (S. 6) ist $I[H, G] \leqq I[h, G]$ für jede Funktion $h(x, y)$, die in $\bar{G}$ definiert ist, auf der Begrenzung $G^* = K$ von G mit $H(x, y)$ identisch ist und für welche $d^0(h, G) \leqq d_5$ ist. $H(x, y)$ ist also eine (G, δ, d_5)-Extremale im Sinne der folgenden Definition: Es sei G eine offene Menge der xy-Ebene, δ eine positive Zahl und d eine Zahl mit $0 < d < D$; eine Funktion $H(x, y)$ mit dem Definitionsbereich $\bar{G}$ und mit der Eigenschaft $d^0(H, \bar{G}) \leqq d$ heiße eine (G, δ, d)-Extremale, wenn $I[H, G] \leqq I[h, G]$ ist für jede Funktion

[14]) Endgültig fixieren werden wir δ erst auf S. 19. Bis dahin sei also δ eine beliebige, aber noch nicht fest gewählte Zahl mit $0 < \delta \leqq \delta_1$. — Die im folgenden auftretenden Zahlen $r_0 - r_5$ werden von δ unabhängig sein (dies ist wichtig, da wir δ mittels r_5 fixieren werden).

$h(x, y)$ mit dem Definitionsbereich $\bar{G}$, welche auf der Begrenzung G^* von G mit $H(x, y)$ identisch ist und für welche $d^0(h, \bar{G}) \leqq d$ ist. Nun gilt auch für die (G, δ, d)-Extremalen der Satz 15 im Teil I unserer Arbeit und wird wörtlich ebenso bewiesen.

Nach I, Satz 15, η) genügt es also, $d^0(H, K, G) \leqq d_4$ zu beweisen. Angenommen, wir wüßten bereits folgendes: Ist (X, Y, Z) ein beliebiger Punkt einer Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit hinreichend kleinem $\Delta(R_0, R)$, so gibt es in einer Kreisscheibe $(x-X)^2+(y-Y)^2 < r_5^2$ zwei Lösungen $\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ der Differentialgleichung I, (13) derart, daß gilt:

(19) $\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ haben die globale Dehnungsschranke d_4,

(20) $$\Psi(x, y) \leqq H(x, y) \leqq \Phi(x, y) \text{ in } E,$$

(21) $$\Psi(X, Y) = H(X, Y) = \Phi(X, Y),$$

wobei E den Durchschnitt der obigen Kreisscheibe mit G bedeutet. Aus (19)—(21) folgt sofort für jeden Punkt $(x, y) \neq (X, Y)$ von E:

$$\frac{|H(x, y) - H(X, Y)|}{\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}} \leqq d_4.$$

Für $\delta \leqq r_5$ gilt also $d^0(H, K, G) \leqq d_4$. Wir brauchen also nur noch die Existenz der zwei Funktionen $\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ mit den Eigenschaften (19)—(21) zu beweisen.

Es sei $A > 1$ eine feste Zahl derart, daß die Kurve R_0 aus $\mathfrak{R}$ in der Menge $x^2+y^2 \leqq (A-1)^2$, $z^2 \leqq (A-1)^2$ enthalten. Für jeden Punkt (X, Y, Z) des xyz-Raumes mit der Eigenschaft $X^2+Y^2 \leqq A^2$, $Z^2 \leqq A^2$ betrachten wir alle Kugeln

$$\tilde{K} = [(x-\tilde{x})^2+(y-\tilde{y})^2+(z-\tilde{z})^2 = c^2]$$

mit dem Radius c (c, d_1 und r wurden auf S. 6 gewählt), deren untere Hälfte

$$z = U(x, y) \equiv \tilde{z} - \sqrt{c^2-(x-\tilde{x})^2-(y-\tilde{y})^2}$$

den Punkt (X, Y, Z) enthält ($Z = U(X, Y)$) und welche in diesem Punkt eine Steigung $\leqq d_1$ haben: $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \leqq d_1^2$ für $x = X$, $y = Y$. Setzen wir $\frac{\partial U}{\partial x}(X, Y) = \alpha$ und $\frac{\partial U}{\partial y}(X, Y) = \beta$, so ist also

(22) $$\alpha^2+\beta^2 \leqq d_1^2$$

sowie

$$\tilde{x} = X - \frac{\alpha c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \tilde{y} = Y - \frac{\beta c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \tilde{z} = Z + \frac{c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}.$$

Wegen $\alpha^2+\beta^2 \leqq d_1^2 < +\infty$ existiert eine positive Zahl r_0 derart, daß die Kreisscheibe $(x-X)^2+(y-Y)^2 < r_0^2$ enthalten ist im Durchschnitt der Projektionen (in der xy-Ebene) aller Kugeln $\tilde{K}$ durch den Punkt

(X, Y, Z); in dieser Kreisscheibe sind also die Funktionen $U(x, y)$, die zu diesen Kugeln gehören, definiert. Und zwar hängt

$$U(x, y) = U(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta)$$

von den unabhängigen Variablen x und y, sowie den Parametern $X, Y, Z = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$ und $\beta = \alpha_3$ regulär analytisch ab im Bereich

$$X^2 + Y^2 \leqq A^2, \quad Z^2 \leqq A^2, \tag{23}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \leqq d_1^2, \tag{24}$$

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 < r_0^2. \tag{25}$$

Es seien X^1 und Y^1 zwei weitere Parameter, die mit den Parametern X und Y durch die Bedingung

$$(X - X^1)^2 + (Y - Y^1)^2 = r^2 \tag{26}$$

verknüpft sind.

Da die Halbkugelflächen $z = U(x, y)$ sämtlich denselben Radius haben und ihre Steigung im Punkt $(x = X, y = Y)$ höchstens gleich d_1 ist, so gilt, falls r_0 hinreichend klein ist, was wir sofort annehmen dürfen, in ganz (25)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \leqq d_2^2.$$

Umsomehr gilt in jedem Punkt (x, y) der Kreisscheibe (25) für die Steigung

$$\frac{\partial U}{\partial t} \equiv -\frac{\partial U}{\partial x}\frac{y - Y^1}{\sqrt{(x - X^1)^2 + (y - Y^1)^2}} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{x - X^1}{\sqrt{(x - X^1)^2 + (y - Y^1)^2}}$$

$\equiv T(x, y) \equiv T(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ der Fläche $z = U(x, y)$ in der Richtung der Tangente t im Punkt (x, y) jedes Kreises $(x - X^1)^2 + (y - Y^1)^2 = r^2$ durch (x, y) und (X, Y) die Ungleichung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 \leqq d_2^2 \tag{27}$$

(t entsprechend dem positiven Umlaufssinn orientiert). Die Funktion T ist eine regulär analytische Funktion ihrer neun Argumente im Bereich (23)—(26). Dasselbe gilt dann auch für die Funktion

$$N \equiv \sqrt{d_3^2 - T^2} \qquad (> 0)$$

und im Bereich (23)—(26) gilt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + N^2 = d_3^2 < D^2. \tag{28}$$

Nach I, Satz 20 gibt es also ein r_1 mit $0 < r_1 < r_0$ derart, daß für jedes Parametersystem $X, Y, Z = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \alpha_3$, X^1, Y^1 des Bereiches (23), (24), (26) in der Kreisscheibe

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 < r_1^2 \tag{29}$$

eine Lösung

$$\Phi(x, y) \equiv \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$$

der Differentialgleichung I, (13) existiert, die auf dem Durchschnitt des Kreises

$$L = [(x - X^1)^2 + (y - Y^1)^2 = r^2] \tag{30}$$

der xy-Ebene mit der Kreisscheibe (29) den Anfangsbedingungen

$$\Phi = U, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = N \tag{31}$$

genügt, wobei $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung nach der äußeren Normale von (30) bedeutet, die Funktionen Φ, Φ_x und Φ_y sind stetige Funktionen ihrer neun Argumente im Bereich (23), (24), (26), (29) und bei festen Parametern regulär analytische Funktionen von $(x\,y)$ in der Kreisscheibe (29).

Es sei $(X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ ein Parameter-7-Tupel des Bereiches (23), (24), (26) und $\Phi(x, y)$ eine zugehörige Funktion. Es sei L der Kreis durch (X, Y), auf dessen Durchschnitt mit (29) die Gleichungen (31) gelten. Nach der ersten der Gleichungen (31) hat $\Phi(x, y)$ im Punkt (X, Y) in der Richtung der Tangente t an L die Steigung $\frac{\partial U}{\partial t}$ und nach der zweiten in der Richtung der Normalen die Steigung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sqrt{d_3^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2}. \tag{32}$$

Also hat $\Phi(x, y)$ in (X, Y) die Steigung d_3. Diese Steigung ist aber gleich $\sqrt{\Phi_x^2(X, Y) + \Phi_y^2(X, Y)}$. Also gilt

$$\Phi_x^2(X, Y) + \Phi_y^2(X, Y) = d_3^2. \tag{33}$$

Nun sei M die Menge aller 9-Tupel $(X, Y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$, wenn das 7-Tupel $(X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ den Bereich (23), (24), (26) durchläuft. Da Φ_x und Φ_y auf dem Bereich (23), (24), (26), (29) stetig sind und $d_3 < d_4$ ist, existiert ein r_2 mit $0 < r_2 < r_1$, so daß

$$\Phi_x^2(x, y) + \Phi_y^2(x, y) < d_4^2 \tag{34}$$

ist in der Menge aller 9-Tupel $(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$, die den Bedingungen $(x - X)^2 + (y - Y)^2 < r_2^2$ (23), (24), (26) genügen. Also hat $\Phi(x, y)$ in der Kreisscheibe $(x - X)^2 + (y - Y)^2 < r_2^2$ die globale Dehnungsschranke d_4. Da die erst später zu wählende Zahl $r_3 \leqq r_2$ sein wird, ist damit der $\Phi(x, y)$ betreffende Teil von (19) bewiesen.

Analog definiert man die Funktion $\Psi(x, y) \equiv \Psi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ mittels der Kugeln K, auf deren Oberseite der Punkt (X, Y, Z) liegt, und beweist die erste Hälfte von (19); dabei hat man eventuell r_1 und r_2 zu verkleinern.

Wegen (27) und

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2$$

für $U(x, y) = U(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta)$ ist

$$\frac{\partial U}{\partial n} \leqq \sqrt{d_2^2-\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2}.$$

Dies ergibt zusammen mit (32) für $\Phi(x, y) = \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}-\frac{\partial U}{\partial n} \geqq \sqrt{d_3^2-\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2}-\sqrt{d_2^2-\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2} \text{ in } (X, Y).$$

Nun ist $\sqrt{d_3^2-\xi^2}-\sqrt{d_2^2-\xi^2} \geqq M = \operatorname{Min}(d_3-d_2, \sqrt{d_3^2-d_2^2}) > 0$ im Intervall $0 \leqq \xi \leqq d_2$. Also gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}-\frac{\partial U}{\partial n} \geqq m > 0 \text{ in } (X, Y).$$

Hieraus ergibt sich für ein hinreichend kleines r_3 mit $0 < r_3 \leqq r_2$: Die zu beliebigen Parameter-7-Tupeln des Bereiches (23), (24), (26) gehörigen Funktionen Φ genügen in der Kreisscheibe $(x-X)^2+(y-Y)^2 < r_3^2$ der Ungleichung [15])

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, y)-\frac{\partial U}{\partial n}(x, y) > 0. \tag{35}$$

Dies folgt, analog wie (34) aus (33), wenn man berücksichtigt, daß

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{x-X^1}{\sqrt{(x-X^1)^2+(y-Y^1)^2}}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot\frac{y-Y^1}{\sqrt{(x-X^1)^2+(y-Y^1)^2}}$$

und analog $\frac{\partial U}{\partial n}$ auf dem Bereich (23), (24), (26), (29) stetig sind. Nach der ersten Gleichung (31) ist $\Phi(x, y) = U(x, y)$ auf dem Durchschnitt der Kreisfläche $(x-X)^2+(y-Y)^2 < r_1^2$ mit L. Hieraus und (35) folgt:

$$U(x, y) \leqq \Phi(x, y) \tag{36}$$

für $U(x, y) = U(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta)$ und $\Phi(x, y) = \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ in jedem Punkt (x, y), der im Durchschnitt der Kreisscheibe $(x-X)^2+(y-Y)^2 \leqq r_3^2$ mit dem abgeschlossenen Außenbereich des Kreises $L = [(x-X^1)^2+(y-Y^1)^2 = r^2]$ liegt.

Nun beschränken wir die Punkte (X, Y, Z), die Kugeln $\tilde{K}$ und $\underset{\sim}{K}$, bestimmt durch α und β, sowie die Kreise L (s. (30)), bestimmt durch X^1 und Y^1 bei festem Radius $\sqrt{(X-X^1)^2+(Y-Y^1)^2} = r$, folgendermaßen. Nach Wahl von A und der Bedingung für Δ (S. 2) existiert ein $\varepsilon_3 > 0$ derart, daß die Punkte (X, Y, Z) jeder Kurve R mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_3$ den Bedingungen (23) genügen. Wir nehmen sofort $\varepsilon_3 \leqq \varepsilon_2(\delta)$ an (dann hängt ε_3 von δ ab: $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\delta)$. Wir betrachten jetzt nur noch

[15]) $\frac{\partial}{\partial n}$ ist die Ableitung in der Richtung von (X^1, Y^1) nach (x, y).

Kurven R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_3$. Als Punkte (X, Y, Z) betrachten wir nur noch die Punkte der Kurven R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_3$. Ist $(X, Y, Z) \in R$ ein solcher Punkt, so lassen wir zu nur noch die ihn enthaltenden Kugeln $\tilde{K}$ bzw. $\underset{\sim}{K}$ mit dem Radius c der auf S. 6 gewählten Menge $\tilde{\mathfrak{K}}(R)$ bzw. $\underset{\sim}{\mathfrak{K}}(R)$ des Satzes 4 (sie haben in (X, Y, Z) eine Steigung $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leqq d_1$, berühren R in (X, Y, Z) von oben bzw. unten und haben mit R nur den Punkt (X, Y, Z) gemein) und die Kreise L der Menge $\mathfrak{L}(R)$ des Satzes 4 mit dem festen Radius r (ihre Mittelpunkte heißen (X^1, Y^1) und sie sind fremd zu G und umschließen G nicht). Die $\tilde{K}$, $\underset{\sim}{K}$ und L bestimmenden Parameter α, β, X^1 und Y^1 sind also i. a. mehrdeutige Funktionen von X, Y und R bzw. K: $\alpha = \alpha(X, Y, R)$, $\beta = \beta(X, Y, R)$, $X^1 = X^1(X, Y, K)$, $Y^1 = Y^1(X, Y, K)$ mit $(X, Y) \in K$. Die durch die Anfangsbedingungen (31) festgelegte(n) Lösung(en)

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$$

der Differentialgleichung I, (13) bezeichnen wir als die zu $(X, Y, Z) \in R$ gehörigen Funktionen $\Phi(x, y)$.

Um (20) zu beweisen für $\Phi(x, y) = \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ und $\Psi(x, y) = \Psi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ (wobei (24) und (26) gelten), genügt es wegen I, Satz 15, ε) nachzuweisen, daß die Ungleichungen $\Psi(x, y) \leqq H(x, y) \leqq \Phi(x, y)$ auf der Begrenzung E^* von E richtig sind; denn $H(x, y)$ ist eine (G, δ, d_5)-Extremale nach S. 11 und die Funktionen $\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ sind als regulär analytische Lösungen der Differentialgleichung I, (13) mit der globalen Dehnungsschranke d_4 Lösungen des Variationsproblems I, (2) nach I, Satz 19 und folglich auch (G, δ, d_5)-Extremalen. Nun ist die Begrenzung des Durchschnittes zweier Mengen enthalten in der Summe der Begrenzungen der beiden Mengen. Also ist jeder Punkt von E^* enthalten entweder im Durchschnitt B der Projektion K von R mit der Kreisscheibe $(x-X)^2 + (y-Y)^2 \leqq r_5^2$ oder im Durchschnitt C des Kreises $(x-X)^2+(y-Y)^2 = r_5^2$ mit $\bar{G}$. Folglich genügt es, statt (20) für hinreichend kleines positives r_5 zu beweisen:

$$\Psi(x, y) \leqq H(x, y) \leqq \Phi(x, y) \text{ in } B, \tag{37}$$

$$\Psi(x, y) \leqq H(x, y) \leqq \Phi(x, y) \text{ in } C. \tag{38}$$

Es sei nun (x, y) ein Punkt des Durchschnittes der Kreisscheibe $(x-X)^2 + (y-Y)^2 \leqq r_3^2$ mit der Projektion K von R. Da der Kreis L (vgl. (30)) durch (X, Y) zu G fremd ist und G nicht umschließt, ist K und somit (x, y) im abgeschlossenen Außenbereich von L enthalten. Wegen (36) gilt also $U(x, y) \leqq \Phi(x, y)$. Anderseits liegt (x, y) wegen $r_3 \leqq r_0$ in der Projektion der Kugel $\tilde{K}$ mit der Unterseite $z = U(x, y)$. Da $\tilde{K}$ die Kurve R in (X, Y, Z) von oben berührt und $(x, y, H(x, y))$ wegen der soeben gemachten Voraussetzung $(x, y) \in K$ auf R liegt, gilt $H(x, y) \leqq U(x, y)$. Es ist also $H(x, y) \leqq \Phi(x, y)$. Für jedes positive

$r_5 \leqq r_3'$ ist damit die auf Φ bezügliche Hälfte von (37) bewiesen. Analog ergibt sich die andere Hälfte.

Nun beginnen wir den schwierigeren Beweis der Ungleichungen (38). Der Punkt (X, Y, Z) variiere in der Kurve R_0 und in Abhängigkeit hiervon variiere das Parameterquadrupel α, β, X^1, Y^1, $(\alpha = \alpha(X, Y, R_0), \beta = \beta(X, Y, R_0), X^1 = X^1(X, Y, K_0), Y^1 = Y^1(X, Y, K_0), (X, Y) \in K_0)$; dann durchläuft also $\tilde{K}$ die Kugeln der Menge $\tilde{\mathfrak{K}}(R_0)$ und L die Kreise der Menge $\mathfrak{L}(R_0)$ des Satzes 4. Es sei $\Phi_0(x, y)$ die (bzw. eine) zu (X, Y, Z) gehörige Funktion. Sie hat im Punkt (X, Y) die Steigung d_3 nach (33), speziell in der Richtung der Tangente t von L ist die Steigung $\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}$ von Φ_0 absolut nur gleich $\frac{\partial U}{\partial t} \leqq d_2$ nach (31) und (27). Bezeichnet also $\mathfrak{r}$ im Punkt (X, Y) diejenige Richtung, in welcher Φ_0 die Steigung d_3 hat, so gilt für den (kleineren) Winkel ω zwischen $|t|$[16]) und $\mathfrak{r}$ die Ungleichung $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. Wegen $\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = N > 0$ weist $\mathfrak{r}$ in das Äußere des Kreises L. Mit $\frac{\partial}{\partial x} \Phi_0$ und $\frac{\partial}{\partial y} \Phi_0$ ist nun auch $\mathfrak{r}$ und damit ω eine stetige Funktion von $(X, Y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$. Außerdem bilden, da die Mengen $\tilde{\mathfrak{K}}(R_0)$ und $\mathfrak{L}(R_0)$ des Satzes 8 in sich kompakt sind, die 9-Tupel $(X, Y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ eine in sich kompakte Menge. Folglich existieren zwei Zahlen ω' und ω'' mit $0 < \omega' < \omega'' < \frac{\pi}{2}$ derart, daß $\omega' \leqq \omega \leqq \omega''$ für alle ω.

Wir bringen nun in jedem Punkt (x, y) der Kreisscheibe $(x - X)^2 + (y - Y)^2 \leqq r_3^2$ den Einheitsvektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ mit der Richtung $\mathfrak{r}$ an und bezeichnen mit $\frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}}$ die Ableitung in der Richtung dieses Vektors. Nach Definition von $\mathfrak{r}$ ist

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathfrak{v}}(X, Y) = d_3.$$

Da $\mathfrak{v}$ auf seinem Definitionsbereich stetig ist, da darin weiter $\frac{\partial}{\partial x} \Phi_0$ und $\frac{\partial}{\partial y} \Phi_0$ stetig sind, ist auch $\frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}} \Phi_0(x, y) = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}} \Phi_0(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ darin stetig. Da auf dem in sich kompakten Teilbereich der $(X, Y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ die letzte Gleichung gilt, existiert ein r_4 mit $0 < r_4 \leqq \mathrm{Min}(r_3, \delta_0)$ derart, daß

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}} \Phi_0(x, y) > d_2 \tag{39}$$

ist überall in der Kreisscheibe $(x - X)^2 + (y - Y)^2 < r_4^2$ bei beliebigem $(X, Y, Z) \in R_0$ und zugehörigen α, β, X^1, Y^1.

Es sei (x, y) ein Punkt des Durchschnittes von G_0 mit einer Kreisscheibe $(x - X)^2 + (y - Y)^2 \leqq r_5^2$, wobei $0 < r_5 < r_4$ und $(X, Y, Z) \in R_0$

[16]) $|t|$ bedeute die nichtorientierte Tangente an L in (X, Y).

ist. Da (x, y) im Außengebiet des Kreises L liegt und $\omega \geqq \omega' > 0$ mit festem ω', so trifft, wenn r_5 (unabhängig von $X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1$) hinreichend klein ist, die rückwärtige Verlängerung von $\mathfrak{v}$ den Kreis L und daher, weil L zu G_0 fremd ist, auch die Projektion $K_0 = G_0^*$ von R_0, in einem ersten Punkt (x', y'), und zwar liegt dieser (bei hinreichend kleinem r_5), in der Kreisscheibe $(x-X)^2 + (y-Y)^2 < r_4^2$.

Wir behaupten nun: in jedem Punkt des Durchschnittes $C_0 = C_0(X, Y)$ des Kreises $(x-X)^2 + (y-Y)^2 = r_5^2$ um $(X, Y) \in K_0$ mit $\bar{G}_0$ gilt

$$H_0(x, y) < \Phi_0(x, y) \tag{40}$$

für jede zu (X, Y, Z) gehörige Funktion Φ_0.

Angenommen, in einem Punkt (x_0, y_0) von C_0 wäre $H_0(x_0, y_0) \geqq \Phi_0(x_0, y_0)$. Dann liegt (x_0, y_0) sicher nicht auf K_0. Denn zunächst ist $(x_0, y_0) \neq (X, Y)$, da (x_0, y_0) auf dem Kreis $(x-X)^2 + (x-Y)^2 = r_5^2$ liegt. Wäre nun (x_0, y_0) auf K_0 gelegen, also $(x_0, y_0, H_0(x_0, y_0)$ auf der Kurve R_0, so wäre einerseits $H_0(x_0, y_0) < U(x_0, y_0)$, da die zu $\Phi_0(x, y)$ gehörige Kugel $\tilde{K}$ mit der Unterseite $z = U(x, y)$ (mit deren Hilfe Φ_0 durch (31) definiert ist) die Kurve R_0 in (X, Y, Z) von oben berührt, aber keinen weiteren Punkt mit R_0 gemeinsam hat; anderseits ist $U(x_0, y_0) \leqq \Phi_0(x_0, y)$ nach (36); also ist $H_0(x_0, y_0) < \Phi_0(x_0, y)$. Mithin liegt (x_0, y_0) in G_0. Die rückwärtige Verlängerung des Vektors $\mathfrak{v}(x_0, y_0, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ bis zum Treffpunkt (x_0', y_0') mit K_0 heiße V. Nach Wahl von r_5 liegt (x_0', y_0') in der Kreisscheibe $(x-X)^2 + (y-Y)^2 \leqq r_4^2$. Nach (38) ist also einerseits $U(x_0', y_0') \leqq \Phi_0(x_0', y')$. Anderseits ist $H_0(x_0', y_0') \leqq U(x_0', y_0')$, da $\tilde{K}$ die Kurve R_0 von oben berührt. Also folgt $H_0(x_0', y_0') \leqq \Phi_0(x_0', y_0')$. Mit den Endpunkten (x_0, y_0) und (x_0', y_0') liegt ganz V in der Kreisscheibe $(x-X)^2 + (y-Y)^2 \leqq r_4^2$. Also hat Φ_0 nach (39) längs V überall eine Steigung $> d_2$. Also muß wegen $H_0(x_0', y_0') \leqq \Phi_0(x_0', y_0')$ und $H_0(x_0, y_0) \geqq \Phi_0(x_0, y_0)$ auch H_0 in mindestens einem Punkt von V eine Steigung $> d_1$ haben, was wegen $r_4 \leqq \delta_0$ (S. 17) im Widerspruch zu (3) steht. Damit ist (40) bewiesen und zwar für jedes Argumentsystem $(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ der Menge $M_0 = [(x, y) \in \bar{G}_0,\ (x-X)^2 + (y-Y)^2 = r_5^2,\ (X, Y, Z) \in R_0;\ \alpha = \alpha(X, Y, R_0),\ \beta = \beta(X, Y, R_0),\ X^1 = X^1(X, Y, K_0),\ Y^1 = Y^1(X, Y, K_0)]$.

Nun ist die Menge M_0 in sich kompakt; denn die Menge $[(x, y) \in \bar{G}_0,\ (x-X)^2 + (y-Y)^2 = r_5^2,\ (X, Y, Z) \in R_0]$ ist natürlich in sich kompakt und für die Mengen $[\alpha = \alpha(X, Y, R_0),\ \beta = \beta(X, Y, R_0)]$ und $[X^1 = X^1(X, Y, K_0),\ Y^1 = Y^1(X, Y, K_0)]$ folgt dies daraus, daß die Mengen $\mathfrak{K}(R_0)$ und $\mathfrak{L}(R_0)$ des Satzes 4 in sich kompakt sind (vgl. die Definition der Funktionen α, β, X^1, Y^1 auf S. 16). Folglich existiert ein festes $\lambda' > 0$ derart, daß $\Phi_0(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1) - H_0(x, y) > \lambda'$ auf der Menge M_0, daß also m. a. W.

$$\Phi_0(x, y) - H_0(x, y) > \lambda'$$
$$\text{auf } C_0 = [(X, Y) \in K_0,\ (x-X)^2 + (y-Y)^2 = r_5^2,\ (x, y) \in \bar{G}_0]$$

gilt für jede zu einem beliebigen Punkt $(X, Y, Z) \in R_0$ gehörige Funktion $\Phi_0(x, y)$. Für jedes solche Φ_0 liegt daher die Punktmenge $[(x, y) \in C_0, z = \Phi_0(x, y)]$ oberhalb der Fläche $[(x, y) \in \overline{G}_0, z = H_0(x, y) + \lambda']$, d. h. ist (x, y, z'') ein beliebiger Punkt der Menge und (x, y, z') der Punkt der Fläche mit denselben x und y, so ist $z' < z''$. Nun existiert ein $\lambda > 0$ derart, daß kein Punkt des Raumes, der von der Fläche $[(x, y) \in \overline{G}_0, z = H_0(x, y)]$ einen Abstand $\leqq 3\lambda$ hat, oberhalb der Fläche $[(x, y \in \overline{G}_0, z = H_0(x, y) + \lambda']$ liegt. Folglich gilt für jede zu einem beliebigen Punkt $(X, Y, Z) \in R_0$ gehörige Funktion $\Phi_0(x, y)$:

(41) Die Punktmenge $[(x, y) \in C_0, z = \Phi_0(x, y)]$ liegt oberhalb der Fläche $[(x, y) \in \overline{G}_0, z = H_0(x, y)]$ und hat von ihr einen Abstand $> 3\lambda$ (im üblichen Sinn).

Durch indirekten Schluß ergibt sich weiter die Existenz einer Zahl $\varkappa > 0$ mit folgender Eigenschaft:

(42) Sind $(x_0, y_0, z_0 = H_0(x_0, y))$ und (x_1, y_1, z_1) zwei Punkte derart, daß (x_0, y_0) und (x_1, y_1) einen Abstand $< \varkappa$ haben und (x_1, y_1, z_1) von der Fläche $[(x, y) \in \overline{G}_0, z = H_0(x, y)]$ einen Abstand $< \varkappa$ hat, so haben (x_0, y_0, z_0) und (x_1, y_1, z_1) einen Abstand $< \lambda$.

Für $\mu > 0$ sei $U(C_0, \mu)$ die Menge aller Punkte der xy-Ebene, die von der Menge C_0 Abstände $< \mu$ haben und $V(C_0, \mu)$ bzw. $W(C_0, \Phi_0, \mu)$ die Menge aller Punkte des Raumes, die von der Menge $[(x, y) \in C_0, z = H_0(x, y)]$ bzw. $[(x, y) \in C_0, z = \Phi_0(x, y)]$ Abstände $< \mu$ haben. Dann ist $U(C_0, \mu)$ die Projektion sowohl von $V(C_0, \mu)$ als auch von $W(C_0, \Phi_0, \mu)$ und aus (41) folgt: $V(C_0, \lambda)$ liegt unterhalb von $W(C_0, \Phi_0, \lambda)$, d. h. sind (x, y, z') und (x, y, z'') zwei Punkte aus $V(C_0, \lambda)$ bzw. $W(C_0, \Phi_0, \lambda)$ mit derselben Projektion $(x, y) \in U(C_0, \lambda)$, so ist $z' < z''$.

Nun setzen wir $\delta = \mathrm{Min}(\delta_1, r_5)$[17].

Es sei nun ε_4 eine positive Zahl $\leqq \varepsilon_3$, über die wir im Folgenden noch genauer verfügen werden. Zu jedem solchen ε_4 existiert dann (S. 2) eine positive Zahl $\varepsilon_5 \leqq \varepsilon_4$ derart, daß es für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_5$ eine topologische Abbildung τ von R_0 auf R gibt, für welche

$$\nabla_\tau(R_0, R) < \varepsilon_4 \tag{43}$$

ist. Es sei R eine Kurve aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_5$ und τ eine Abbildung der genannten Art. Weiter sei (X_0, Y_0) ein die Projektion K_0 von R_0 durchlaufender Punkt und (X, Y) der (X_0, Y_0) bei der Abbildung τ entsprechende Punkt von K. Ist ε_4 hinreichend klein und

[17]) Unsere bisherigen Überlegungen von „*Zweitens*“ (S. 11) an gelten für jedes δ mit $0 < \delta \leqq \delta_1$ (vgl. Fußnote 14). Durch die obige Fixierung von δ sind jetzt auch $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\delta)$ und $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\delta)$ fixiert.

das nehmen wir an, so unterscheiden sich erstens die Kreise $(x-X)^2+(y-Y)^2=r_5^2$ und $(x-X_0)^2+(y-Y_0)^2=r_5^2$ und zweitens nach Satz 5 die Bereiche $\bar{G}$ und $\bar{G}_0$ so wenig voneinander, daß für jeden Punkt (X_0, Y_0) von K_0 und sein τ-Bild (X, Y) in K die Mengen

$$C = [(x-X)^2+(y-Y)^2 = r_5^2,\ (x,y)\in\bar{G}],$$
$$C_0 = [(x-X_0)^2+(y-Y_0)^2 = r_5^2,\ (x,y)\in\bar{G}_0]$$

folgende Eigenschaft haben:

$$C\subset U(C_0, \varkappa). \tag{44}$$

Nach Satz 4 sind die Mengen $\mathfrak{L}(R_0)$ und $\tilde{\mathfrak{R}}(R)$ in sich kompakt. Infolgedessen bilden die 7-Tupel $(X_0, Y_0, Z_0, \alpha_0, \beta_0, X_0^1, Y_0^1)$, wobei (X_0, Y_0, Z_0) die Kurve R_0 durchläuft und für jedes $(X_0, Y_0, Z_0)\in R_0$ die vier Zahlen α_0, β_0, X_0^1 und Y_0^1 alle Werte der i. a. mehrdeutigen Funktionen $\alpha(X_0, Y_0, R_0)$, $\beta(X_0, Y_0, R_0)$, $X^1(X_0, Y_0, K_0)$ und $Y^1(X_0, Y_0, K_0)$ annimmt, eine in sich kompakte Teilmenge des Bereiches (23), (24) und (26).

Deshalb und weil (nach S. 14) $\Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ im Bereich (23), (24), (26), (29) stetig ist, gilt für ein festes, hinreichend kleines $\bar{\sigma}>0$ (das wir sofort $<\frac{\lambda}{3}$ wählen) und jedes hinreichend kleine $\sigma>0$ folgendes: Für jede zu einem Punkt $(X_0, Y_0, Z_0)\in R_0$ gehörige Funktion

$$\Phi_0(x,y) = \Phi(x, y, X_0, Y_0, Z_0, \alpha_0, \beta_0, X_0^1, Y_0^1)$$

und jede zu einem Punkt $(X, Y, Z)\in R$ gehörige Funktion

$$\Phi(x,y) = \Phi(x, y, X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1),$$

für welche

$$\begin{gathered}|X_0-X|<\sigma,\ |Y_0-Y|<\sigma,\ |Z_0-Z|<\sigma,\\ |\alpha_0-\alpha|<\sigma,\ |\beta_0-\beta|<\sigma,\ |X_0^1-X^1|<\sigma,\ |Y_0^1-Y^1|<\sigma\end{gathered} \tag{45}$$

ist, gilt die Ungleichung

$$|\Phi_0(x'', y'')-\Phi(x', y')<\tfrac{\lambda}{3} \tag{46}$$

für je zwei Punkte (x', y') und (x'', y'') mit

$$\begin{cases} |x''-x'|<\bar{\sigma},\ |y''-y'|<\bar{\sigma}\\ (x''-X_0)^2+(y''-Y_0)^2=r_5^2,\ (x'-X)^2+(y'-Y)^2=r_5\\ (x'', y'')\in\bar{G}_0,\ (x', y')\in\bar{G}. \end{cases} \tag{47}$$

Falls nun ε_5 hinreichend klein ist, gibt es für jedes zu einem beliebigen Punkt (X, Y, Z) von R gehörige 7-Tupel $(X, Y, Z, \alpha, \beta, X^1, Y^1)$ auf R_0 einen Punkt (X_0, Y_0, Z_0) und ein dazugehöriges 7-Tupel $(X_0, Y_0, Z_0, \alpha_0, \beta_0, X_0^1, Y_0^1)$ derart, daß die Ungleichungen (45) erfüllt sind (Satz 4, δ)). Bei hinreichend kleinem ε_5 unterscheiden sich nach Satz 3 weiter $\bar{G}_0$ und $\bar{G}$ so wenig voneinander und bei hinreichend kleinem σ ist der Abstand der Punkte (X_0, Y_0) und (X, Y) nach (45)

so klein, daß C in einer so kleinen Umgebung von C_0 liegt, daß es zu jedem Punkt $(x', y') \in C$ einen Punkt $(x'', y'') \in C_0$ gibt derart, daß (47) gilt. Also gilt dann (46) für jeden Punkt $(x', y') \in C$ und einen geeigneten Punkt $(x'', y'') \in C_0$. Hieraus folgt wegen (47) und $\bar{\sigma} < \frac{\lambda}{3}$:

Ist $\Phi(x, y)$ eine zu einem beliebigen Punkt (X, Y, Z) von R mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon_4$ gehörige Funktion, so gibt es unter den zu einem geeigneten Punkt (X_0, Y_0, Z_0) von R_0 gehörigen Funktionen eine Funktion $\Phi_0(x, y)$ mit folgender Eigenschaft:

(48) die Menge $[(x, y) \in C, \quad z = \Phi(x, y)]$ liegt in $W(C_0, \Phi_0, \lambda)$.

Schließlich behaupten wir für hinreichend kleines ε_4:

(49) die Menge $[(x, y) \in C, \quad z = H(x, y)]$ liegt in $V(C_0, \lambda)$.

Wegen (42) und (43) genügt es, zu beweisen, daß die Fläche $[(x, y) \in G, \; z = H(x, y)]$ in der $\varkappa$-Umgebung der Fläche $[(x, y) \in \bar{G}_0 \; z = H_0(x, y)]$ liegt, falls ε_4 hinreichend klein ist. Nun wählen wir ein positives ν so klein, daß

$$\nu < \delta \text{ und } \nu < \frac{\varkappa}{2 + d_5} \tag{50}$$

ist und nehmen ε_4 so klein an, daß gilt:

$$\varepsilon_4 < \nu, \; \varepsilon_4 < \delta_0 - \nu \text{ und } \varepsilon_4 < \frac{\varkappa}{1 + 2 d_0 + d_5}. \tag{51}$$

Es sei S bzw. T die Menge aller Punkte (x, y) von $\bar{G}$ mit Abständen $= \nu$ bzw. $< \nu$ von $K = G^*$.

Wir betrachten $H(x, y)$ zunächst auf der Menge T. Es sei (x, y) ein Punkt von T. Dann existiert auf K ein Punkt (X, Y) mit einem Abstand $< \nu$ von (x, y). Wegen $d^\delta(H, \bar{G}) \leqq d_5$ und $\nu < \delta$ ist dann $|H(x, y) - H(X, Y)| < \nu d$; also hat der Punkt $(x, y, H(x, y))$ vom Punkt $(X, Y, H(X, Y))$ der Kurve R einen Abstand $< \nu + \nu d_5$. Nun hat der Punkt $(X, Y, Z = H(X, Y))$ von seinem τ-Urbild $(X_0, Y_0, Z_0 = H_0(X_0, Y_0)) \in R_0$ wegen (43) einen Abstand $\leqq \varepsilon_4$. Wegen der zweiten Ungleichung (50) und der ersten Ungleichung (51) hat also der Punkt $(x, y, H(x, y))$ von $(X_0, Y_0, Z_0) \in R_0$ einen Abstand $< \varkappa$.

Nun betrachten wir $H(x, y)$ auf S. Es sei (x, y) ein Punkt von S. Dann liegt (x, y) sicher auch in $\bar{G}_0$, da K_0 wegen (43) in der ε_4-Umgebung von K liegt und $\varepsilon_4 < \nu$ ist nach (51). Wir wollen $|H(x, y) - H_0(x, y)|$ abschätzen. Auf K existiert ein Punkt (X, Y) mit dem Abstand ν von (x, y). Da $\nu < \delta$ ist nach (50) und $d^\delta(H, \bar{G}) \leqq d_5$ gilt, ist wie vorhin $|H(x, y) - H(X, Y)| < \nu d_5$. Ist nun $(X_0, Y_0, Z_0 = H_0(X_0, Y_0))$ das τ-Urbild $\in R_0$ von $(X, Y, Z = H(X, Y))$ so ist $|H(X, Y) - H_0(X_0, Y_0)| < \varepsilon_4$ nach (43). Da außerdem (x, y) und (X_0, Y_0) einen Abstand $< \nu + \varepsilon_4$ haben und $\nu + \varepsilon_4 < \delta_0$ ist nach (51), so ist $|H_0(X_0, Y_0) - H_0(x, y)| < (\nu + \varepsilon_4) d_0$ wegen (3). Also gilt

$$|H(x, y) - H_0(x, y)| < \varkappa$$

wegen (51).

Diese letzte Ungleichung gilt also auf ganz S. Nun enthält S die Begrenzung der offenen Menge $G_1 = \bar{G} - (S + T) \subset G_0$. Da $H(x,y)$ und $H_1(x,y)$ beide (G_1, δ, d_5)-Extremalen sind nach I, Satz 15, α), so folgt aus I, Satz 15, β) und ε), daß $|H(x,y) - H_0(x,y)| < \varkappa$ auch in ganz G_1 gilt. — Dies, zusammen mit dem vorhin bewiesenen Resultat, daß für $(x,y) \in T$ der Punkt $(x, y, H(x,y))$ in der $\varkappa$-Umgebung der Kurve R_0 liegt, ergibt die zu beweisende Behauptung, daß die Fläche $[(x,y) \in \bar{G}.\ z = H(x,y)]$ in der $\varkappa$-Umgebung der Fläche $[(x,y) \in \bar{G}_0,\ z = H(x,y)]$ liegt.

Aus (48) und (49), sowie der oben (S. 19) festgestellten Tatsache, daß $V(C_0, \lambda)$ unterhalb von $W(C_0, \Phi_0, \lambda)$ liegt, folgt der auf $\Phi(x,y)$ bezügliche Teil von (38). Analog beweist man den auf $\Psi(x,y)$ bezüglichen Teil von (38).

Damit ist (20) bewiesen.

Schließlich ergibt sich (21) einfach daraus, daß die Funktion auf der rechten Seite der ersten Anfangsbedingung (31) für $x = X$, $y = Y$ den Wert $Z = r(X,Y) = H(X,Y)$ hat.

Damit ist der Satz 1 bewiesen.

§ 4.

Beweis des Satzes 2.

Es sei R eine Kurve aus $\mathfrak{R}$. Sie sei der Limes einer Folge $\{R_i\}$ von Kurven R_i aus $\mathfrak{R}$, für welche das Randwertproblem I. (2), (5) eine Lösung $H_i(x,y)$ besitzt und für welche nicht $\lim d(R_i) = D$ ist. Es genügt zu zeigen, daß dann R in $\mathfrak{R}_1$ liegt. — Wegen $d(R_i) = d(H_i) < D$ und der Voraussetzung, daß nicht $\lim d(R_i) = D$ ist, können wir sofort voraussetzen, daß ein $d < D$ existiert derart, daß $d(R_i) < d$ gilt für alle i.

Nach I, Hilfssatz 1 hat jedes $H_i(x,y)$ auf jeder konvexen Teilmenge des von der Projektion K_i von R_i begrenzten beschränkten Gebietes G_i die globale Dehnungsschranke d.

Wegen $\lim R_i = R$ existiert weiter eine Konstante $k > 0$ derart, daß die Kurven R_i und R sämtlich zwischen den Ebenen $z = k$ und $z = -k$ liegen. Nach I, Satz 15, δ) gilt dann $|H_i(x,y)| < k$ in ganz $\bar{G}_i$ für jedes $i = 1, 2, \ldots$. Ist nun $\{O_n\}$ eine Folge von offenen, samt Peripherie in G enthaltenen Kreisscheiben, deren Summe $O_1 + O_2 + \cdots = G$ ist, so enthält also nach I, Satz 10 die Folge $\{H_i(x,y)\}$ eine auf $\bar{O}_1$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{H_i^1(x,y)\}$[18]), diese eine auf $\bar{O}_2$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{H_i^2(x,y)\}$, usw. Die Diagonalfolge der Folgen $\{H_i^1(x,y)\}$, $\{H_i^2(x,y)\}$, ... konvergiert also gleichmäßig auf $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \ldots$[19]). Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit sofort

[18]) Wegen $\lim R_i = R$ ist auch $\lim G_i = G$ und daher auch jedes $\bar{O}_n$ in fast allen G_i enthalten.

[19]) Dabei ist jedes $\bar{O}_n$ i. a. im Definitionsbereich nicht aller, sondern nur fast aller Funktionen der Diagonalfolge enthalten.

annehmen, daß die Folge $\{H_i(x,y)\}$ selbst auf jedem $\bar{O}_n$ gleichmäßig konvergiert.

Die Limesfunktion $H(x,y)$ ist in $O_1+O_2+\cdots=G$ definiert und hat in jeder Kreisscheibe O_n die globale Dehnungsschranke d. $H(x,y)$ ist also in G lokal dehnungsbeschränkt mit der Dehnungsschranke d. Nach I, Satz 9 kann $H(x,y)$ erweitert werden zu einer in $\bar{G}$ definierten und dort stetigen, lokal dehnungsbeschränkten Funktion $\bar{H}(x,y)$, z. B. mit der lokalen Dehnungsschranke $\frac{1}{2}(d+D)$.

Wir behaupten weiter, daß die Fläche $z=\bar{H}(x,y)$ die Randkurve R hat, d. h. daß, wenn $R=|(x,y)\in K,\ z=r(x,y)|$ ist, auf K gilt $\bar{H}(x,y)=r(x,y)$. Wegen der Stetigkeit von $\bar{H}(x,y)$ und $r(x,y)$ und da nach I, Satz 5 die Menge der Punkte, in denen K differenzierbar ist, in K dicht liegt, genügt es, die Gleichung $\bar{H}(x,y)=r(x,y)$ zu beweisen für jeden Punkt (x,y), in welchem K differenzierbar ist. Es sei (x_0,y_0) ein solcher Punkt und $(x_0,y_0,z_0=r(x_0,y_0))$ der zugehörige Punkt von R. Weiter sei ein $\varepsilon>0$ gegeben. Wir zeichnen durch (x_0,y_0) die Normale N zu K und wählen auf N denjenigen Punkt (x_1,y_1), der in G liegt und von (x_0,y_0) den Abstand ε hat. Ist ε hinreichend klein, was wir annehmen, existiert (x_1,y_1) sicher. Dann ist $|\bar{H}(x_0,y_0)-\bar{H}(x_1,y_1)|\leqq D\varepsilon$ nach I, Hilfssatz 1, da $\bar{H}(x,y)$ die lokale Dehnungsschranke D hat. Der Punkt (x_1,y_1) liegt in einer Kreisscheibe $\bar{O}_n$. Da die Folge $\{H_i(x,y)\}$ auf O_n gleichmäßig gegen $H(x,y)$ konvergiert, ist $|H(x_1,y_1)-H_i(x_1,y_1)|\leqq\varepsilon$ für jedes hinreichend große i. Für jedes so große i, daß (x_1,y_1) in G_i liegt, laufen wir auf N von (x_1,y_1) aus in Richtung auf (x_0,y_0), bis wir (eventuell erst nach Passieren von (x_0,y_0)) zum ersten Mal auf einen Punkt (x_i,y_i) der Projektion $K_i=G_i^*$ von R_i treffen. Die offene Strecke $S_i\subset N$ mit den Endpunkten (x_1,y_1) und (x_i,y_i) liegt dann in G_i. Ist i weiter so groß, daß R in einer hinreichend kleinen Umgebung von R liegt, (es ist $\lim R_i=R$!), so haben die Punkte $(x_i,y_i,H_i(x_i,y_i))\in R_i$ und $(x_0,y_0,z_0)\in R$ einen Abstand $\leqq\varepsilon$ und die Länge von S_i ist $\leqq 2\varepsilon$. Dann gilt $|H_i(x_i,y_i)-z_0|\leqq\varepsilon$ und $|H_i(x_i,y_i)-H_i(x_1,y_1)|\leqq 2D\varepsilon$ (letzteres, weil $H_i(x,y)$ auf S_i die Dehnungsschranke D hat; nach I, Hilfssatz 1). Die bewiesenen Ungleichungen zusammen ergeben $|z_0-\bar{H}(x_0,y_0)|\leqq\varepsilon(3D+2)$. Also gilt $z_0=\bar{H}(x_0,y_0)$. Die Fläche $z=\bar{H}(x,y)$ hat also die Randkurve R.

Schließlich ist $\bar{H}(x,y)$ eine Lösung des Variationsproblems I, (2), (5) für das Gebiet G: $I[H,G]=\text{Min}$. Um dies zu zeigen, genügt es nach I, Satz 18 zu beweisen, daß $I[H,G_0]=\text{Min}$ ist für jede offene Teilmenge G_0 von G mit $\bar{G}_0\subset G$. Es sei also G_0 eine solche Menge. Wegen $\bar{G}_0\subset G$ existiert dann ein natürliches n derart, daß $G_0\subset O_1+O_2+\cdots+O_n$ gilt, sowie ein i_0 derart, daß $O_1+O_2+\cdots+O_n\subset G_i$ gilt für alle $i>i_0$. Auf $\bar{O}_1+\bar{O}_2+\cdots+\bar{O}_n$, also auch auf $\bar{G}_0$ konvergiert die Folge $\{H_i(x,y)\}$ $(i=i_0,\ i_0+1,\ldots)$ gleichmäßig gegen $\bar{H}(x,y)=H(x,y)$. Da $H_i(x,y)$

in G_i eine Lösung des Variationsproblems ist ($I[H_i, G_i] = \text{Min}$), so für $i > i_0$ auch in $G_0 \subset G_i$ (Beweis wie für I, Hilfssatz 15, α)). Schließlich haben alle $H_i(x, y)$ die lokale Dehnungsschranke $d < D$. Nach I, Satz 17 ist also $H(x, y)$ eine Lösung des Variationsproblems I, (2), für die Menge G_0[20]), w. z. z. w.

§ 5.

Beispiele einer stumpfen Kurve.

Satz 6. *Es sei K eine einfach geschlossene Kurve der xy-Ebene: $K = [x = x(\varphi), y = y(\varphi), 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi]$, mit zweimal stetig differenzierbarem $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$. Dann ist K auf beiden Seiten stumpf*[21]).

Beweis. Unter dem *Richtungswinkel* eines Teilbogens B von K verstehen wir folgendes: Zunächst orientieren wir B; ist P ein Punkt von B, so zeichnen wir in P die vordere Halbtangente an B und zu dieser die parallele Halbgerade mit dem Anfangspunkt im Koordinatenursprung; lassen wir nun P den Bogen B durchlaufen, so überstreicht die genannte parallele Halbgerade einen gewissen Winkel (teilweise i. a. mehrfach); diesen Winkel bezeichnen wir als den Richtungswinkel von B.

Bemerkung 1. Ist der Richtungswinkel von B höchstens gleich $\frac{\pi}{2}$, so ist B enthalten in der kleinsten abgeschlossenen Kreisscheibe S, welche die Endpunkte E und F von B enthält.

Angenommen, ein Punkt G von B läge außerhalb von S. Dann gibt es auf B zwischen E und G einen Punkt P_1, in welchem die gerichtete Tangente an B parallel ist zur gerichteten Strecke von E nach G; analog gibt es auf B zwischen G und F einen Punkt P_2, in welchem die gerichtete Tangente an B parallel ist zur gerichteten Strecke von G nach F. Der Richtungswinkel von B ist mindestens gleich dem Winkel zwischen diesen gerichteten Tangenten in P_1 und P_2, also mindestens gleich dem Supplement des Winkels EGF. Da dieses Supplement $> \frac{\pi}{2}$ ist, so ist der Richtungswinkel von B größer als $\frac{\pi}{2}$, entgegen der Voraussetzung.

Bemerkung 2. Der Bogen B habe einen Richtungswinkel $\leqq \frac{\pi}{2}$, seine Endpunkte E und F mögen auf einem Kreis L mit einem Radius r

[20]) Im Beweis von I, Satz 17 wird die Voraussetzung betr. die Begrenzung G^* von G, die für unser G_0 nicht erfüllt zu sein braucht, nur dazu gebraucht, nachzuweisen, daß $H(x, y)$ in $\mathfrak{F}(\bar{G})$ liegt, d. h. in $\bar{G}$ eine lokale Dehnungsschranke $< D$ hat. In unserem Fall hat $H(x, y)$ in G und daher auch in $\bar{G}_0 \subset G$ die lokale Dehnungsschranke $d < D$, wie oben festgestellt wurde. Also gilt die Behauptung von I, Satz 17 für unser G_0.

[21]) Dieses Beispiel hätte in den Teil I dieser Arbeit gehört.

liegen, während mindestens ein Punkt von B im Äußeren von L liegt. Dann gibt es auf B mindestens einen Punkt mit einem Krümmungsradius $\leqq r$.

Zum Beweis sei $S \supset B$ die Kreisscheibe der Bemerkung 1. Da P im Äußeren von L liegt, fällt L nicht mit der Peripherie von S zusammen nach der Bemerkung 1; also ist der Radius von S kleiner als der von L und folglich liegen sich E und F auf L nicht diametral gegenüber. Wir lassen einen zweiten, zunächst mit L zusammenfallenden Kreis L' sich so bewegen, daß der Mittelpunkt von L' sich geradlinig auf den Mittelpunkt der Strecke EF zu bewegt. Bevor er diesen erreicht, hat L' in einem bestimmten Augenblick eine Lage, bei welcher B in der dann von L' begrenzten abgeschlossenen Kreisscheibe enthalten ist, während mindestens ein Punkt P von B auf L' liegt. B berührt also L' in P von innen und hat daher in P einen Krümmungsradius $\leqq r$.

Nun ergibt sich der Beweis des Satzes 6 folgendermaßen. Wir stellen K dar als Summe endlich vieler Teilbogen $K_1, \ldots, K_h$ mit Richtungswinkeln $< \frac{\pi}{6}$ und setzen $K_{h+n} = K_n$, wenn n ganz. Die Numerierung sei so gewählt, daß man $K_1, \ldots, K_h$ in dieser Reihenfolge bei einer Durchlaufung von K durchläuft. Es sei nun $r > 0$ erstens kleiner als der kleinste Krümmungsradius von K und zweitens höchstens gleich dem halben Abstand jedes Bogens K_μ von $K_{\mu+2} + K_{\mu+3} + \cdots + K_{\mu+h-2}$. Nun sei E ein beliebiger Punkt von K. Er liege etwa auf K_μ. Wir zeichnen die beiden Kreise L_1 und L_2 mit dem Radius r, welche K in E berühren. Da r kleiner ist als der Krümmungsradius von K in P, liegen alle zu P hinreichend benachbarten Punkte $\neq E$ von K im Äußeren sowohl von L_1 als auch von L_2. Angenommen nun, es gäbe einen Punkt von K im Innern etwa von L_1. Dann gibt es auch einen Punkt F von K auf L_1. Nach Wahl von r ist F ein Punkt des Bogens $K_{\mu-1} + K_\mu + K_{\mu+1}$. Auf den Teilbogen B dieses Bogens mit den Endpunkten E und F treffen dann die Voraussetzungen der Bemerkung 2 zu. Nach dieser Bemerkung gibt es also auf B einen Punkt mit einem Krümmungsradius $\leqq r$, im Widerspruch zur Definition von r. Damit ist Satz 6 bewiesen.

Ein erstes Beispiel eines zugelassenen Kurvenraumes.

Die Begrenzung $G^* = K$ eines beschränkten Gebietes G sei eine Summe von endlich vielen, paarweise fremden, einfach geschlossenen Kurven $K_1, \ldots, K_m$ und stumpf auf der Seite G. (Also z. B. K eine einfach geschlossene zweimal stetig differenzierbare Kurve (Satz 6)). K sei die Projektion von jeder der $n+1$ paarweise verschiedener, zugelassener Kurven[22]) $R^{(i)} = [(x, y) \in K,\ z = z_i(x, y)]$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

[22]) Definition der zugelassenen Kurven: I, 714.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ die lineare Schar aller Kurven

$$R = R(\Theta_1, \ldots, \Theta_n) =$$
$$[(x, y) \in K,\ z = z_0(x, y) + \Theta_1 z_1(x, y) + \cdots + \Theta_n z_n(x, y)]$$
$$-\infty < \Theta_1 < +\infty, \ldots, -\infty < \Theta_n < +\infty.$$

Als Abstand zweier Kurven $R' = R(\Theta_1', \ldots, \Theta_n')$ und $R'' = R(\Theta_1'', \ldots, \Theta_n'')$ aus $\mathfrak{S}$ führen wir ein die Zahl

$$\triangle(R', R'') = \sqrt{(\Theta_1' - \Theta_1'')^2 + \cdots + (\Theta_n' - \Theta_n'')^2}.$$

Dieser Abstand genügt den üblichen drei Abstandsaxiomen und der Bedingung von S. 2. Wir behaupten folgenden

Satz 7. *Die Menge $\mathfrak{R}$ aller Kurven aus $\mathfrak{S}$, welche zugelassen sind, bilden eine offene Teilmenge von $\mathfrak{S}$ und zugleich einen zugelassenen Kurvenraum.*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $n = 1$. Den allgemeinen Fall erledigt man ganz analog.

Es sei $R_0 = [(x, y) \in K,\ z = z_0(x, y) + \Theta^0 z_1(x, y)]$ eine zugelassene Kurve aus $\mathfrak{S}$. Alle Kurven R aus $\mathfrak{S}$ haben natürlich die Eigenschaften I, 1–4 und die Zahl r der letzteren Eigenschaft ist von R unabhängig, da K von R unabhängig ist. Es genügt also folgendes zu zeigen: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für $|\Theta - \Theta^0| < \varepsilon$ die Kurven $R(\Theta) = [(x, y) \in K,\ z = z_0(x, y) + \Theta z_1(x, y)]$ die Eigenschaft I, 5 haben und zwar mit von Θ unabhängigen Zahlen c und d.

Setzen wir $z_0(x, y) + \Theta^0 z_1(x, y) = z_0'(x, y)$ und $\Theta - \Theta^0 = \Theta'$, so ist

$$R(\Theta) = [(x, y) \in K,\ z = z_0'(x, y) + \Theta' z_1(x, y)] = R'(\Theta'),$$
$$R_0 = [(x, y) \in K,\ z = z_0'(x, y)] = R'(0).$$

Indem wir zur Vereinfachung wieder $z_0(x, y)$ statt $z_0'(x, y)$ und Θ statt Θ' schreiben, ist $R(\Theta) = [(x, y) \in K,\ z = z_0(x, y) + \Theta z_1(x, y)]$ und $R_0 = [(x, y) \in K,\ z = z_0(x, y)] = R(0)$.

Dann haben wir also zu zeigen: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für $|\Theta| < \varepsilon$ die Kurven $R(\Theta)$ die Eigenschaft 5 haben und zwar mit von Θ unabhängigen Zahlen c und d. Wir zeigen dies für $0 \leqq \Theta < \varepsilon$; man führt hierauf den Fall $-\varepsilon' < \Theta \leqq 0$ durch Spiegelung an der xy-Ebene zurück.

Da die Kurven R_0 und $R_1 = [(x, y) \in K,\ z = z_1(x, y)]$ die Eigenschaft I, 5 besitzen, existiert ein $c' > 0$ und ein d' mit $0 < d' < D$ derart, daß es zu jedem Punkt $P = (X, Y, Z_i)$ von R_i eine Kugel

$$\tilde{K}_i = \tilde{K}(X, Y, Z_i, \alpha_i, \beta_i)$$

mit dem Radius c' gibt, deren Steigung in P höchstens gleich d' ist und welche R_i in P von oben berührt $(i = 0, 1)$. Es sei $z = U_i(x, y)$ und $z = O_i(x, y)$ die untere bzw. obere Hälfte der Kugel $\tilde{K}_i$. Der Durchschnitt der Definitionsbereiche der vier Funktionen enthält eine Kreis-

scheibe $F = F(X, Y)$ mit dem Mittelpunkt (X, Y) und einem Radius ϱ, der unabhängig von (X, Y) gewählt werden kann (da die Radien der Kugeln $\tilde{K}_0$ und $\tilde{K}_1$ konstant $= c'$ und ihre Steigungen in den Berührungspunkten $\leqq d'$ sind). Wir betrachten die vier Flächen $z = O_i(x, y)$ und $z = U_i(x, y)$ $(i = 0, 1)$ nur über $F = F(X, Y)$. Nun berührt für hinreichend kleines $\Theta \geqq 0$ die Fläche $z = U_0(x, y) + \Theta U_1(x, y)$ die Kurve $R(\Theta)$ im Punkt $(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1)$ von oben (die Fläche hat dort die Steigung $\sqrt{(\alpha_0 + \Theta\alpha_1)^2 + (\beta_0 + \Theta\beta_1)^2}$) und liegt ihrerseits unterhalb der Fläche $z = O_0(x, y) + \Theta O_1(x, y)$; zwischen diesen beiden Flächen liegt kein Punkt von $R(\Theta)$, da kein Punkt von R_i zwischen $z = O_i(x, y)$ und $U_i(x, y)$ liegt $(i = 0, 1)$. Nun existiert, wenn $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist, ein von (X, Y) unabhängiges c'' derart, daß für jedes Θ mit $0 \leqq \Theta < \varepsilon$ durch jeden Punkt $(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1)$ von $R(\Theta)$ eine Kugel mit dem Radius c'' geht, welche die Fläche $z = U_0(x, y) + \Theta U_1(x, y)$ in diesem Punkt von oben berührt und ganz zwischen den Flächen $z = U_0(x, y) + \Theta U_1(x, y)$ und $z = O_0(x, y) + \Theta O_1(x y)$ liegt[23]). (Man beachte: Bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ hat der Abstand des Punktes $(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1)$ von der Fläche $z = O_0(x, y) + \Theta O_1(x, y)$ eine positive (von (X, Y) und Θ unabhängige) untere Schranke σ; die Schnittkurven der Fläche $z = U_0(x, y) + \Theta U_1(x, y)$ mit den Ebenen durch $(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1)$ senkrecht zur xy-Ebene haben Krümmungsradien mit positiver (von (X, Y) und Θ unabhängiger) unterer Schranke τ; wenn ϱ hinreichend klein ist, was angenommen werden kann, haben diese Schnittkurven Richtungswinkel $\leqq \frac{\pi}{2}$; nach der Bemerkung 2 im Beweis des Satzes 6 angewandt auf die Schnittkurven hat nun die Kugel $\tilde{K}(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1, \alpha_0 + \Theta\alpha_1, \beta_0 + \Theta\beta_1)$, welche im Punkt $(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1)$ die Tangententialebene $z = (\alpha_0 + \Theta\alpha_1) + (\beta_0 + \Theta\beta_1)\, y + \text{const.}$ an die Fläche $z = U_0(x, y) + \Theta U_1(x, y)$ in diesem Punkt von oben berührt und den Radius $c'' = \text{Min}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}, \tau\right)$ hat, die verlangten Eigenschaften). Ist ε und damit $\Theta \geqq 0$ hinreichend klein, so unterscheidet sich die Steigung der Kugel im Punkt $(X, Y, Z_0 + \Theta Z_1)$ so wenig von d', daß sie $\leqq d = \frac{d' + D}{2} < D$ ist. — Analog verfährt man für die von unten berührenden Kugeln. Damit ist der Satz 7 bewiesen.

Ein zweites Beispiel eines zugelassenen Kurvenraumes.

Es sei $\mathfrak{R}$ das System aller einfach geschlossenen Kurven R, welche neben den Eigenschaften I, 2—4 die folgenden zwei Eigenschaften haben:

Eigenschaft 5′: Ist $R = [(x, y) \in K,\ z = z(x, y)]$, so ist $z(x, y)$ auf K lokal dehnungsbeschränkt mit lokalen Dehnungsschranken $< D$.

[23]) Die Fläche $z = z(x, y)$ liegt zwischen den Flächen $z = z'(x, y)$ und $z = z''(x, y)$, wenn $z'(x, y) \leqq z(x, y) \leqq z''(x, y)$ ist.

Eigenschaft 6′: R ist rektifizierbar und die Koordinaten x, y, z der Punkte von R sind nach der Bogenlänge s von R zweimal stetig differenzierbar.

Wir machen $\mathfrak{R}$ folgendermaßen zu einem metrischen Raum. Ist τ eine topologische Abbildung zweier gegebener Kurven von R_0 und R aus $\mathfrak{R}$ aufeinander, so setzen wir

$$\Delta_\tau(R_0, R) = \operatorname{Max}\left\{|x_0 - x|, |y_0 - y|, |z_0 - z|, \left|\frac{dx_0}{ds_0} - \frac{dx}{ds}\right|, \left|\frac{dy_0}{ds_0} - \frac{dy}{ds}\right|, \left|\frac{dz_0}{ds_0} - \frac{dz}{ds}\right|, \left|\frac{d^2x_0}{ds_0^2} - \frac{d^2x}{ds^2}\right|, \left|\frac{d^2y_0}{ds_0^2} - \frac{d^2y}{ds^2}\right|, \left|\frac{d^2z_0}{ds_0^2} - \frac{d^2z}{ds^2}\right|\right\},$$

wobei (x_0, y_0, z_0) die Kurve R_0 durchläuft und (x, y, z) das τ-Bild von (x_0, y_0, z_0) in R ist; s_0 ist die Bogenlänge auf R_0, s die Bogenlänge auf R. Die Zahl

$$\Delta(R_0, R) = \operatorname{Inf} \Delta_\tau(R_0, R),$$

wobei τ alle topologischen Abbildungen von R_0 auf R durchläuft, führen wir als Abstand der Kurven R_0 und R ein. Dieser Abstand genügt den üblichen Abstandsaxiomen und der Bedingung von S.

Satz 8. *$\mathfrak{R}$ ist ein zugelassener Kurvenraum.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{R}$ die Eigenschaften I, 5 und 6 hat.

Es sei R_0 eine Kurve aus $\mathfrak{R}$.

Wir wählen für die Projektion K_0 von R_0 eine Zahl $r_0 > 0$ analog wie die Zahl r für die Kurve K im Beweis des Satzes 6 mithilfe einer Darstellung von K_0 als Summe von endlich vielen Teilbogen $K_{01}, \ldots, K_{0h}$ mit Richtungswinkeln $< \frac{\pi}{12}$. Ist R eine Kurve aus $\mathfrak{R}$ und $\Delta(R_0, R) < \varepsilon$ mit zunächst beliebigem $\varepsilon > 0$, so existiert nach Definition von $\Delta(R_0, R)$ eine topologische Abbildung τ der Kurven R_0 und R aufeinander derart, daß die Koordinaten aufeinander abgebildeter Punkte sowie deren ersten und zweiten Ableitungen nach den Bogenlängen sich um weniger als 2ε unterscheiden. Ist ε hinreichend klein, so ist also das Minimum der Krümmungsradien von K größer als $\frac{r_0}{2}$, die τ-Bilder der Bogen $K_{01}, \ldots, K_{0h}$ haben Richtungswinkel $< \frac{\pi}{6}$ und der Abstand des τ-Bildes des Bogens $K_{0\mu}$ vom τ-Bild der Menge $K_{0\mu+2} + K_{0\mu+3} + \cdots + K_{0\mu+h-2}$ ist $< \frac{r_0}{2}$ für $\mu = 1, \ldots, h$. Setzen wir also $r = \frac{r_0}{2}$, so ist nach den Überlegungen im Beweis des Satzes 6 die Projektion K der beliebigen Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \varepsilon$ auf der Seite G stumpf vom Grade r.

Jetzt haben wir noch zu zeigen, daß jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft I, 5 besitzt und daß die darin auftretenden Zahlen c und d gleichmäßig gewählt werden können für alle Kurven R aus $\mathfrak{R}$ mit hinreichend kleinem $\Delta(R_0, R)$. Dazu beweisen wir zunächst folgende

Bemerkung 3. Zu jeder Kurve R_0 aus $\mathfrak{R}$ existieren zwei Zahlen $\delta > 0$ und $c > 0$ derart, daß für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \delta$ folgendes gilt: Jede Vollkugel $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \leqq c$, deren Inneres zu R fremd ist, hat mit R höchstens einen Punkt gemein.

Zum Beweis dieser Bemerkung bezeichnen wir als Zylinder Z_{rh} jede Menge des Raumes, die kongruent ist zu $[x^2 + y^2 < r, |z| < h]$. Jede Gerade durch einen Punkt (x_0, y_0, z) der Begrenzung Z^*_{rh}, die bei dieser Kongruenz auf eine Gerade der xy-Ebene mit dem Abstand r vom Ursprung abgebildet wird, heiße eine äquatoriale Tangente von Z_{rh} im Punkt (x, y, z). Es genügt der Beweis der folgenden Behauptung:

Es existieren drei positive Zahlen δ, r und h derart, daß für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $\Delta(R_0, R) < \delta$ folgendes gilt: Jeder Zylinder Z_{rh}, von dem eine äquatoriale Tangente in einem Punkt (x, y, z) von $Z^*_{rh} \cdot R$ mit der Tangente von R in (x, y, z) zusammenfällt, ist fremd zu R.

Angenommen, diese Behauptung wäre falsch. Dann existiert erstens in $\mathfrak{S}$ eine Folge $\{R_n\}$ mit $\lim \Delta(R_0, R_n) = 0$, zweitens auf jedem R_n ein Punkt (x_n, y_n, z_n) und drittens für jedes n ein Zylinder $Z_n = Z_{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}}$ mit $(x_n, y_n, z_n) \in Z^*_n$, dessen äquatoriale Tangente in (x_n, y_n, z_n) mit der Tangente T_n von R_n in (x_n, y_n, z_n) zusammenfällt, derart, daß $Z_n \cdot R_n$ nicht leer ist.

Indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge übergehen, können wir sofort annehmen, daß die Folge $\{x_n, y_n, z_n\}$ gegen einen Punkt (x_0, y_0, z_0) von R konvergiert, und daß außerdem die Achsen A_n der Zylinder Z_n gegen eine Gerade G durch (x_0, y_0, z_0) konvergieren. (Dann konvergieren wegen $\lim \Delta(R_0, R_n) = 0$ auch die Tangenten T_n gegen die Tangente T_0 an R_0 in (x_0, y_0, z_0)). Indem wir weiter für jedes ν die R_ν einer Kongruenz unterwerfen, dürfen wir weiterhin annehmen, daß die Punkte (x_ν, y_ν, z_ν) mit dem Koordinatenursprung zusammenfallen, daß T die z-Achse und daß

$$Z_n = \left[\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{n^2},\ |z| < \frac{1}{n}\right]$$

ist[24]). Schließlich können wir sofort annehmen, daß für jedes R_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$.) der zum Punkt $(0, 0, 0)$ gehörige Parameterwert $s = 0$ ist.

Die Parameterdarstellung von R_ν laute: $x = x_\nu(s)$, $y = y_\nu(s)$, $z = z_\nu(s)$. Da der Zylinder Z_n in $(0, 0, 0)$ die x-Achse zur äquatorialen Tangente hat, so ist also die x-Achse die Tangente an R_ν im Punkt $(0, 0, 0)$. Es ist also $x'_\nu(0) = 1$, $y'_\nu(0) = 0$, $z'_\nu(0) = 0$. Es existiert also

[24]) ν durchläuft stets die Zahlen 0, 1, 2, ... hingegen n die Zahlen 1, 2, ...

ein $s_0 > 0$ derart, daß $|x_0'(s)| > \frac{3}{4}$ und $|y_0'(s)| < \frac{1}{8}$ ist für $|s| \leqq s_0$. Wegen $\lim \Delta(R_0, R_n) = 0$ existiert ein n_0, so daß

(52) $\quad |x_n'(s)| > \frac{1}{2}$ und $|y_n'(s)| < \frac{1}{4}$ für $|s| \leqq s$ und $n > n$

ist.

Weiter haben, wenn n hinreichend groß ist, die Projektionen $(x_0(s), y_0(s))$ der Punkte $(x_0(s), y_0(s), z_0(s))$ von R_0 mit $|s| \geqq s_0$ Abstände von der Kreisscheibe $\left[\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}\right]$ mit einer positiven unteren Schranke 2η; dies gelte etwa für $n > n_1$. Wegen $\lim \Delta(R_0, R_n) = 0$ existiert dann ein n_2 (das wir sofort $\geqq n_0$ und $\geqq n_1$ annehmen) derart, daß gilt:

$(x_n(s), y_n(s))$ hat von $\left[\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}\right]$ einen Abstand $> \eta$ für $n > n_2$ und $|s| \geqq s_0$.

Hieraus folgt, daß für $n > n_2$ die Menge aller Punkte der Kurve R_n, deren Parameterwerte s absolut $\geqq s_0$ sind, fremd ist zum Zylinder Z_n. Da R_n zu Z_n nicht fremd ist auf Grund der ad absurdum zu führenden Annahme, so folgt, daß der Teilbogen $B_n = [|s| \leqq s_0]$ von R_n zu Z_n nicht fremd ist für $n > n_2$. Bezeichnen wir mit $\underline{B}_n$ die Projektion dieses Teilbogens in die xy-Ebene, so ist also B_n zur Kreisscheibe $\left[\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}\right]$ nicht fremd.

Diese Projektion $\underline{B}_n = [x = x_n(s),\ y = y_n(s),\ s \leqq s_0]$ ist ein Bogen; denn da $x_n'(s) > 0$ ist nach (52), gilt $x_n(s_1) \neq x_n(s_2)$ für $-s_0 \leqq s_1 < s_2 \leqq s_0$. Die Krümmungsradien $\varrho_n(s)$ von $\underline{B}_n$ haben eine positive untere Schranke, da $x_n'^2 + y_n'^2 > \frac{1}{4}$ ist nach (52) für $n > n_0$ und da wegen der Beschränktheit von x_0', y_0', x_0'', y_0'' und $\lim \Delta(R_0, R_n) = 0$ die Differenz $x_n' y_n'' - x_n'' y_n'$ gleichmäßig beschränkt ist. Für alle hinreichend großen n liegen daher alle zu $(0, 0)$ hinreichend benachbarten Punkte von B_n mit $s \neq 0$ nicht in der Kreisscheibe $\left[\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 \leqq \frac{1}{n^2}\right]$. Der Bogen B_n enthält also einen Teilbogen C_n, dessen Endpunkte auf

$$\left[\left(x \pm \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\right]$$

liegen, während alle anderen Punkte von C_n im Äußeren dieses Kreises liegen. Da $\left|\frac{dy}{dx}\right| = |y_n'(s)| : |x_n'(s)| < \frac{1}{2}$ ist nach (52), hat $\underline{B}_n$ einen Richtungswinkel $< \frac{\pi}{2}$. Hieraus folgt nach der Bemerkung 2 im Beweis des Satzes 6, daß es auf C_n, für großes n, einen Punkt gibt, in welchem der Krümmungsradius $\leqq \frac{1}{n}$ ist, im Widerspruch zur Beschränktheit von $\varrho_n(s)$ nach unten.

Damit ist die Bemerkung 3 bewiesen.

Nach Eigenschaft 6' hat R_0 in jedem Punkt (x_0, y_0, z_0) eine (von diesem Punkt stetig abhängende) Tangente T_0. Die Steigung d_0 dieser

Tangente ist $< D$ nach Eigenschaft 5'. Wegen der Stetigkeit von T_0 existiert sogar ein $d < D$ derart, daß $d_0 < d$ ist für alle Punkte (x_0, y_0, z_0) von R_0. Folglich existiert weiter ein $\delta > 0$ derart, daß für jede Kurve R aus $\mathfrak{R}$ mit $J(R_0, R) < \delta$ gilt: Die Steigung d_1 der Tangente an R in einem beliebigen Punkt (x_1, y_1, z_1) von R ist $< d$. Nun sei $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ die Ebene durch (x_1, y_1, z_1) mit der Steigung d_1, welche diese Tangente enthält. Wir können nun die Zahl δ sofort so klein annehmen, daß für sie und ein $c > 0$ die soeben bewiesene Bemerkung 3 gilt. Von den Kugeln

$$\tilde{\mathfrak{K}} = [(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2 + (z-\tilde{z})^2 = c^2],$$

$$\underset{\sim}{\mathfrak{K}} = [(x-\underset{\sim}{x})^2 + (y-\underset{\sim}{y})^2 + (z-\underset{\sim}{z})^2 = c^2] \text{ mit}$$

$$\tilde{x} = x_1 - \frac{\alpha c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \tilde{y} = y_1 - \frac{\beta c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \tilde{z} = z_1 + \frac{c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}$$

$$\underset{\sim}{x} = x_1 + \frac{\alpha c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \underset{\sim}{y} = y_1 + \frac{\beta c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}, \quad \underset{\sim}{z} = z_1 - \frac{c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}$$

berührt die erste die Ebene $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ im Punkt (x_1, y_1, z_1) von oben bzw. unten. Nach der Bemerkung 3 berühren sie also auch R im Punkt (x_1, y_1, z_1) von oben bzw. von unten im Sinne unserer Definition von I, S. 715. Die Steigung der Kugeln im Punkt (x_1, y_1, z_1) ist gleich $d_1 < d$.

Damit ist alles bewiesen.

(Eingegangen am 26. August 1947.)

Über Weierstraßpunkte und die expliziten Darstellungen der automorphen Formen von reeller Dimension.

Von

H. Petersson in Hamburg.

1. Im Folgenden betrachten wir die automorphen Formen einer reellen Dimension $-r$ mit Multiplikatoren v des Betrages Eins zu einer Grenzkreisgruppe Γ von erster Art mit der oberen τ-Halbebene $\mathfrak{H}$ als Grenzkreisinnerem. Die Gesamtheit dieser automorphen Formen nennen wir $\{\Gamma, -r, v\}$, die einzelne Funktion von $\{\Gamma, -r, v\}$ nennen wir eine (automorphe) Form $\{\Gamma, -r, v\}$. Ferner werde unter

$$\mathfrak{C}_r = \mathfrak{C}(\Gamma, -r, v)$$ die Schar der ganzen Formen $\{\Gamma, -r, v\}$,

unter

$$\mathfrak{C}_r^+ = \mathfrak{C}^+(\Gamma, -r, v)$$ die Schar der ganzen Spitzenformen $\{\Gamma, -r, v\}$

verstanden. Eine Form $\{\Gamma, -r, v\}$ heißt eine ganze Spitzenform, wenn sie ganz ist und in allen Spitzen (parabolischen Fixpunkten) von Γ verschwindet. Zur Orientierung über die einfachsten Grundbegriffe der Theorie sei auf die kurze Zusammenstellung im ersten Abschnitt der Abhandlung [1]) des Verf.s hingewiesen, aus der wir auch die Bezeichnungen übernehmen. Wir beschränken uns hier jedoch nicht auf die Gruppen Γ mit parabolischen Substitutionen (d. h. in jenen Bezeichnungen mit $\sigma_0 > 0$); wenn σ_0 verschwindet, fallen $\mathfrak{C}_r$ und $\mathfrak{C}_r^+$ zusammen.

Bekanntlich stellt der Ansatz der Poincaré-Reihen das einzige Prinzip zur expliziten Konstruktion allgemeiner automorphen Formen und Funktionen dar. In welchem präzisen Sinne der Ausdruck „explizite Konstruktion" zu interpretieren ist, soll in diesem einleitenden Abschnitt 1 noch erläutert werden. Grundsätzlich und vom historischen Standpunkt darf hierzu bereits jetzt gesagt werden, daß die zu ihrer Zeit zweifellos berechtigte Kritik Kleins [2]) an der Tragweite des Ansatzes der Poincaré-Reihen und aller seiner Verallgemeinerungen durch die neueren Ergebnisse, insbesondere über die metrische Bedeutung der Poincaré-Reihen, als entkräftet angesehen werden kann.

[1]) H. Petersson, Über die systematische Bedeutung der Eisensteinschen Reihen, erscheint in den Abhandl. a. d. Math. Seminar Hamburg.

[2]) F. Klein, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, herausgegeben von O. Haupt. Springer 1933 (Gelbe Sammlung. Bd. 39). S. 294, 302.

Im Einzelnen bemerken wir zunächst, daß die Konstruktion Poincaréscher Reihen in Gestalt von Partialbruch-Entwicklungen, deren einzelne Glieder vorgegebene Hauptteile in endlich vielen Systemen untereinander äquivalenter Punkte darstellen, in jedem wünschenswerten Sinne explizit zu nennen ist. Dabei erweist es sich als möglich und vorteilhaft, den Begriff des Hauptteils so weit zu fassen, daß er die konstanten Glieder in den Spitzen einbegreift. Aus dieser Konstruktion folgt, daß sich jede nicht in der Schar $\mathfrak{C}_r^+$ enthaltene Form $f \subset \{\Gamma, -r, v\}$ mit Hilfe einer durch f eindeutig und explizit bestimmten Partialbruchreihe der angedeuteten Art additiv auf eine Form aus $\mathfrak{C}_r^+$ reduzieren läßt. — Daß eine Lösung des genannten Reduktionsproblems auf einem anderen Wege als über diese Partialbruchreihen erreicht werden kann, ist nicht anzunehmen.

Damit entsteht als Hauptproblem der Theorie die Frage nach der expliziten Konstruktion einer Basis der Schar $\mathfrak{C}_r^+$. Diese Frage hat sich bis heute sehr weitgehend, aber immerhin noch nicht in vollem Umfange beantworten lassen. Was bewiesen ist, wird durch einen metrisch-algebraischen Zusammenhang zwischen der Struktur der Schar $\mathfrak{C}_r^+$ und gewissen Systemen Poincaréscher Reihen $\{\Gamma, -r, v\}$ ausgedrückt[3]); die hier in Betracht kommenden Strukturaussagen über die Schar $\mathfrak{C}_r^+$ beziehen sich sämtlich auf den Begriff der Weierstrass-Punkte und seiner Verallgemeinerungen. Der Zusammenhang kann in den einfachsten Fällen andeutungsweise wie folgt beschrieben werden.

a) Es bezeichne $\mathfrak{K}$ einen (etwa kanonischen) Fundamentalbereich von Γ, τ_0 einen Punkt in $\mathfrak{K}$, ν eine ganze Zahl > 0. Jedem solchen Paare τ_0, ν entspricht eindeutig eine gewisse Poincaré-Reihe (Quersumme) des erwähnten Systems, die wir vorübergehend $F(\tau; \tau_0, \nu)$ nennen wollen. Es sei nun (hier und im Folgenden) μ der Rang von $\mathfrak{C}_r^+$. Dann gibt es unendlich viele Ziffernsysteme $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu$ derart, daß die $F(\tau; \tau_0, \nu_i)$ $(1 \leqq i \leqq \mu)$ eine Basis von $\mathfrak{C}_r^+$ bilden. Das am leichtesten zugängliche, nämlich lexikographisch niedrigste solcher Ziffernsysteme beschreibt den Weierstrassschen Charakter des Punktes τ_0 bezüglich der Schar $\mathfrak{C}_r^+$ (also, wenn nicht $r = 2$, $v = 1$ ist, *nicht* im klassischen Sinne), d. h. die zugehörigen ν_i stimmen im wesentlichen mit den Lücken in den Polordnungen der auf $\mathfrak{K}$ außerhalb von τ_0 regulären *Formen* $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ überein. Im allgemeinen, und zwar für alle τ_0 in $\mathfrak{K}$ mit einer angebbaren endlichen Anzahl von Ausnahmen, bilden die ersten μ Reihen $F(\tau; \tau_0, \nu)$ $(1 \leqq \nu \leqq \mu)$ eine Basis

[3]) H. Petersson, Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der Poincaréschen Reihen, Math. Annalen **117** (1940); Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art, Abhandl. a. d. Math. Seminar Hamburg **14** (1941). Auf diese Abhandlungen wird im zweiten Abschnitt ohne weiteres Zitat Bezug genommen.

von $\mathfrak{G}_r^+$. Zur Bestimmung der Ausnahmepunkte aber fehlte bisher im allgemeinen Falle jeder Ansatz.

b) Man betrachte eine beliebige Basis $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_\mu(\tau)$ von $\mathfrak{G}_r^+$ und μ verschiedene Nichtfixpunkte $\tau_k (1 \leqq k \leqq \mu)$ in $\mathfrak{R}$. Die Diskriminante

$$\Delta = \Delta(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\mu) = |\varphi_j(\tau_k)| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

der Schar $\mathfrak{G}_r^+$ nimmt beim Übergang von den φ_j zu einer anderen Basis von $\mathfrak{G}_r^+$ einen von Null verschiedenen konstanten Faktor auf und verschwindet nach allgemeinen Sätzen höchstens auf niederdimensionalen Ausnahme-Mannigfaltigkeiten. Die Quersummen $F(\tau; \tau_k, 0)$ bilden dann und nur dann eine Basis von $\mathfrak{G}_r^+$, wenn $\Delta \neq 0$ ausfällt. Zur Bestimmung der Ausnahme-Mannigfaltigkeiten $\Delta = 0$ aber fehlt im allgemeinen Falle vorerst jeder Ansatz. —

Von den hier angeführten Basissätzen existieren zahlreiche Varianten, Zwischenbildungen und Verallgemeinerungen. Ihnen allen ist eine Unbestimmtheit der geschilderten Art gemeinsam. und diese drückt sich, soweit das vorgelegte System von Quersummen auf diskrete Parameterwerte bezogen ist, stets etwa in der Art aus, daß die Parameterwerte mit gewissen, der numerischen Bestimmung überaus schwer zugänglichen Lückenzahlen nach Art der Weierstrassschen Lückenzahlen klassischen Ursprungs zusammenfallen müssen. Die klassischen Lückenzahlen selbst treten bei der Untersuchung der Differentialklassen $\{\Gamma, -2, 1\}$ auf. Hier bedarf es zur Konstruktion der zugehörigen Poincaré-Reihen besonderer Hilfsmittel, da die Reihen F nicht mehr absolut konvergieren; die Reihen F lassen sich jedoch nach ihrer Erklärung durch ein (allerdings kompliziertes) Summationsverfahren in den geschilderten Zusammenhang sinngemäß einbeziehen.

Die zitierten Sätze lassen mit hinreichender Deutlichkeit erkennen, daß man nicht damit rechnen kann, allgemein gültige Aussagen zu erhalten, welche die Basiseigenschaft eines explizit bestimmten Systems Poincaréscher Reihen formulieren. Dagegen gibt es, wie im ersten Teil der vorliegenden Abhandlung gezeigt werden soll, explizite Kriterien für die getrennte Verwirklichung jeder einzelnen der beiden in einer Basis vereinigten Eigenschaften eines Systems von Quersummen $F(\tau; \tau_0, \nu)$, nämlich einerseits für seine lineare Unabhängigkeit, andrerseits für seine Vollständigkeit, d. h. dafür, daß die Reihen des Systems die volle Schar $\mathfrak{G}_r^+$ aufspannen. Das eine Kriterium besagt genauer, daß die mit willkürlichen paarweise verschiedenen $z_k (1 \leqq k \leqq b)$ im Fundamentalbereich $\mathfrak{R}$ und willkürlichen natürlichen Zahlen n_k mit der gegebenen Summe μ' gebildeten Quersummen

$$(1) \quad F(\tau; z_k, \nu_k) \ (\nu_k = 1, 2, \ldots, n_k, \ 1 \leqq k \leqq b), \ n_1 + n_2 + \cdots + n_b = \mu'$$

die volle Schar $\mathfrak{G}_r^+$ aufspannen, wo μ' eine gewisse, aus den Daten der Formenklasse $\{\Gamma, -r, v\}$ elementar bestimmbare natürliche Zahl

bezeichnet, die den Rang μ von $\mathfrak{C}_r^+$ um höchstens p_0, das Geschlecht von Γ übertrifft. Das andere Kriterium hat nur dann einen Inhalt, wenn $\mu > p_0$ erfüllt ist; es gilt unter der Voraussetzung, daß die Nullstellenanzahl der Formen von $\mathfrak{C}_r^+$ nicht unter einer gewissen extrem niedrigen Grenze liegt, und besagt, daß ein ebenso wie in (1) willkürlich, aber unter der Bedingung

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_b = \mu - p_0$$

vorgegebenes Funktionensystem von der Gestalt (1) aus lauter linear unabhängigen Funktionen besteht.

Das an zweiter Stelle genannte Kriterium reduziert die Aufgabe der expliziten Basiskonstruktion auf die Bestimmung von nur noch p_0 Funktionen $F(\tau; \tau_0, \nu)$; demgemäß verfolgen die im zweiten Teil der Abhandlung dargestellten Überlegungen das Ziel, zu zeigen, daß die fehlenden p_0 Funktionen — wenigstens unter gewissen Voraussetzungen — aus der Kenntnis der klassischen Lückenzahlen von Weierstrass erhalten werden können. Diese Voraussetzungen schränken an sich weder die Gruppe Γ noch die Dimension $-r$ der betreffenden automorphen Formen ein; sie bedeuten, daß in der zu $\{\Gamma, -r, v\}$ komplementären Formenklasse $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ eine Form anzugeben sei, deren Pole genau bekannt sind, und die außer den durch das Multiplikatorsystem v^{-1} in den Fixpunkten bedingten Bruchbestandteilen der Ordnungen keine Nullstellen aufweist. Die damit gestellte Forderung läßt sich als eine Eigenschaft des Multiplikatorsystems v der Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$ formulieren und besagt etwa, daß v als Potenzprodukt der Multiplikatorsysteme derjenigen Primformen[4]) dargestellt werden könne, welche zu den oben genannten Polen der Form der Komplementärklasse gehören. Im übrigen ergibt sich aus dem Jacobischen Umkehrtheorem, daß eine Form der oben genannten Beschaffenheit zu allgemeinen Daten $\{\Gamma, -r, v\}$ stets existiert, wofern nur r eine gewisse Gruppenkonstante r^0 übertrifft, die in der erdrückenden Mehrzahl aller Fälle kleiner als 3 ist. Daher kann jene Voraussetzung bei allgemeinem Γ und reellem $r \leqq r_0$ als eine einschränkende Annahme über das Multiplikatorsystem v angesehen werden.

Vom Standpunkt des Riemann-Rochschen Satzes gestatten die zitierten Ergebnisse noch eine andere Deutung: Der eigentliche Grund zunächst dafür, daß sich $\mu - p_0$ von den μ Formen einer Basis der Schar $\mathfrak{C}_r^+$ durch eine so überaus einfache, völlig voraussetzungslose Vorschrift bestimmen lassen, liegt darin, daß diese Vorschrift vermöge der Metrisierung auf eine Aussage über nicht-speziale Scharen im Sinne des klassischen Riemann-Rochschen Satzes zurückgeführt

[4]) H. Petersson, Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen III, Math. Annalen **115** (1938); neben diesem dritten Teil werden die Teile I, II (im gleichen Annalenband) in dem einführenden Abschnitt 2 der vorliegenden Abhandlung ausführlicher herangezogen.

werden kann. Eine Ausdehnung dieses Zusammenhanges ist jedoch nachweislich nicht möglich: Bereits die explizite Bestimmung einer einzigen der fehlenden p_0 Funktionen führt auf Spezialscharen. Zur Durchführung der vollständigen Basiskonstruktion hat man sich natürlich der aus[3]) bekannten Beziehung zu bedienen, die die Metrisierung zwischen den Quersummen $F(\tau; \tau_0, v)$ und dem verallgemeinerten Riemann-Rochschen Satz für automorphe Formen reeller Dimension herstellt. Danach erhöht sich die Anzahl der linear unabhängigen unter den bereits gewonnenen Quersummen durch Hinzunahme einer neuen Quersumme $F(\tau; \tau_0, v)$ um Eins, wenn v eine gewisse Lückenbedingung für die Polordnungen der Formen $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ im Punkte $\tau = \tau_0$ erfüllt. Enthält nun die Klasse $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ eine Form der oben genannten Beschaffenheit, so läßt sich diese Lückenbedingung auf die klassische Lückenbedingung von Weierstrass und damit die vollständige Basiskonstruktion auf die Kenntnis der Weierstrassschen Lückenzahlen zurückführen.

Die Bedeutung des Begriffs der expliziten Konstruktion, wie er hier verwendet wird, bedarf noch einer näheren Erklärung. Zunächst erhellt, daß keine dieser Konstruktionsaufgaben in irgend einem Sinne ein definites Problem darstellt, wenn nicht angenommen wird, daß das Multiplikatorsystem v der zu untersuchenden Formenklasse $\{\Gamma, -r, v\}$ wenigstens grundsätzlich bekannt sei. Hier handelt es sich zweifelsohne um eine sehr gewichtige Voraussetzung, da die Multiplikatorsysteme selbst bei den Gruppen Γ, deren Matrixelemente ein bekanntes Bildungsgesetz befolgen, überaus schwer zugänglich sind. Immerhin kennt man aber für ganzes r stets ein Multiplikatorsystem, in Sonderfällen für ganzes und halbzahliges r deren mehrere; und die Kriterien des ersten Teils der vorliegenden Abhandlung können bei grundsätzlicher Kenntnis von v ohne Einschränkung als explizit bezeichnet werden.

Im zweiten Teile gewinnt der tiefer liegende Zusammenhang eine besondere Bedeutung, der zwischen einer automorphen Form $f(\tau)$ in ihrer Darstellung als Potenzprodukt von Primformen und ihrem Multiplikatorsystem v als dem Multiplikatorsystem dieses Potenzprodukts besteht. Im wesentlichen handelt es sich um die Ermittlung eines Primform-Potenzprodukts, dessen Multiplikatorsystem mit dem gegebenen v übereinstimmt. Die damit gestellte Frage führt, wofern ihre Antwort in Spezialfällen nicht von vornherein vorliegt, auf ein Gleichungssystem vom Typus der Gleichungen des Umkehrtheorems und damit letztlich auf Abelsche Funktionen, in deren Bereich ein Konstruktionsverfahren für die im Falle $r > r^0$ sicher existierenden Lösungen des Gleichungssystems auszubilden wäre.

Zusammenfassend ist von den Untersuchungen des zweiten Teils zusagen, daß sich die dort gewonnenen Kriterien natürlich nicht

allgemein explizit realisieren lassen, und daß also nur eine grundsätzliche Aufklärung über die das Gesamtproblem bestimmenden Zusammenhänge erreicht werden kann. Dabei ergibt sich einerseits, daß sich die Ermittlung aller wesentlichen Eigenschaften der automorphen Formen auf die der Eigenschaften ihrer Multiplikatorsysteme zurückführen läßt. Andrerseits aber entstehen aus der Untersuchung der Multiplikatorsysteme neue funktionentheoretische Probleme, deren genauere Diskussion eine Heranziehung der Abelschen Funktionen erfordert.

Die Übertragung der hier andeutungsweise umrissenen Theorie von der Γ zugeordneten Riemannschen Fläche in die obere τ-Halbebene $\mathfrak{H}$ macht eine Auswahl unter den einem Flächenpunkte $\mathfrak{p}_0$ entsprechenden Punkten τ_0 in $\mathfrak{H}$ notwendig. Hierüber seien noch folgende Bemerkungen angefügt:

Ersetzt man in der einzelnen Funktion $F(\tau; \tau_0, \nu)$ den festen Punkt τ_0 durch einen zu τ_0 nach Γ äquivalenten Punkt $L_0\tau_0 (L_0 \subset \Gamma)$, so nimmt $F(\tau; \tau_0, \nu)$ lediglich einen elementar bestimmbaren und stets von Null verschiedenen konstanten Faktor auf. Zur Realisierung der Kriterien, die im Folgenden bewiesen werden, braucht man daher keineswegs einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ von Γ mehr oder minder genau zu kennen. Es genügt vielmehr, — wofern das System der verwendeten Punkte z_k mehr als einen Punkt enthält, — daß ein Verfahren bekannt sei, welches die Äquivalenz oder Nicht-Äquivalenz vorgegebener Punkte in endlich vielen Schritten zu entscheiden gestattet. Von einem solchen Verfahren muß angenommen werden, daß es gleichzeitig mit der Matrizengruppe Γ, von der die ganze Untersuchung ausgeht, vorgelegt ist. Im übrigen kann sogar auf diese wohl selbstverständliche Grundlage der Theorie verzichtet werden, wenn man sich damit begnügen will, Systeme (1) in Betracht zu ziehen, die mit Hilfe nur eines Punktes $z = z_1$, also für $b = 1$ gebildet sind. —

Die genaueren Einzelheiten und die ersten Konsequenzen der beiden oben ausführlicher zitierten Kriterien werden im dritten Abschnitt der Abhandlung in der für die vorliegende Untersuchung angemessenen Sprache der Divisorentheorie formuliert. Der zweite Abschnitt bringt, soweit über [1]) hinaus erforderlich, eine kurze Zusammenstellung der nötigen Hilfsmittel aus der allgemeinen und der metrischen Theorie der automorphen Formen. Die hier zitierten metrischen Zusammenhänge bilden neben dem Riemann-Rochschen Satz die methodische Grundlage der Arbeit. Im vierten Abschnitt werden diejenigen Kriterien entwickelt, welche die lineare Unabhängigkeit von mehr als $\mu - p_0$ explizit bestimmbaren Poincaré-Reihen betreffen. Welcher Kriterien man sich zur expliziten Konstruktion möglichst vieler linear unabhängigen Poincaré-Reihen in konkreten Fällen zu bedienen hat, wird an einigen Beispielen zu dem allgemeinen Satz 12 dargelegt.

Diese im fünften Abschnitt behandelten Beispiele gehören der Theorie der Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe an. Die den betreffenden Gruppen entsprechenden algebraischen Gebilde sind sämtlich nicht hyperelliptisch. Daß sich hier eine explizite Basiskonstruktion überhaupt durchführen läßt, beruht ganz wesentlich darauf, daß es gelingt, für drei Kongruenzgruppen der Geschlechter $p_0 = 3, 3, 5$ die WEIERSTRASS-Punkte und die WEIERSTRASSschen Lückenzahlen numerisch zu berechnen.

Bezüglich des Zusammenhanges zwischen der Struktur der Schar $\mathfrak{G}_r^+$ und den oben genannten Systemen (1) POINCARÉscher Reihen sei noch folgendes hervorgehoben: Jede Aussage über die lineare Unabhängigkeit eines aus m Funktionen bestehenden Systems (1) läßt sich mit Hilfe der Metrisierung auf eine Aussage der folgenden Art zurückführen und mit ihr als gleichbedeutend erweisen: Ein durch die POINCARÉ-Reihen eindeutig bestimmtes System von m Entwicklungskoeffizienten der allgemeinen Form φ der Schar $\mathfrak{G}_r^+$ legt diese Form bis auf eine additive Zusatzform fest, die nur noch von $\mu - m$ Scharparametern linear homogen abhängt. Insbesondere bedeutet eine Basiskonstruktion das gleiche wie die Ermittlung von μ Entwicklungskoeffizienten der allgemeinen Form φ, deren Werte diese Form völlig festlegen. In diesem Sinne kann eine solche Basiskonstruktion als eine Interpolationsaufgabe interpretiert werden; die unter a) genannte Basisbestimmung entspricht der Interpolation nach der TAYLORschen Formel, die Basisbestimmung unter b) der Interpolation nach der LAGRANGEschen Interpolationsformel.

Bezüglich der Bezeichnungen sei den folgenden Ausführungen vorangeschickt, daß die Symbole Γ, r, v stets in der oben genannten Bedeutung auftreten; es ist also stets Γ eine Grenzkreisgruppe von erster Art, r eine reelle Zahl, v ein Multiplikatorsystem des Betrages Eins. Wie ebenfalls oben bemerkt, werden über [1]) hinaus auch Grenzkreisgruppen ohne parabolische Substitutionen untersucht. Mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen wir wie in [1])[3]) einen — etwa kanonischen — Fundamentalbereich von Γ. Die für das Folgende grundlegende metrische Verknüpfung der automorphen Formen geschieht mit Hilfe der in [1])[3]) eingeführten invarianten Integration.

2. Es sei $f(\tau) \subset \{\Gamma, -r, v\}$. Neben der Entwicklung [1]) (11) (12) benötigen wir die Entwicklungen von $f(\tau)$ nach den Ortsvariabeln der Punkte in $\mathfrak{H}$. Es sei $\tau_0 \subset \mathfrak{H}$. Wir erhalten mit konstanten Koeffizienten $b_m(\tau_0, f)$:

$$(2) \qquad f(\tau) = (\tau - \bar{\tau}_0)^{-r} \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m(\tau_0, f) \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}\right)^m.$$

Ist hier $\tau_0 = \omega$ eine Ecke (ein elliptischer Fixpunkt) von Γ der Ordnung l, so verschwinden alle $b_m(\omega, f)$ mit $m \not\equiv a \pmod{l}$, wo a eine durch r und v eindeutig bestimmte nicht negative ganze Zahl $\leqq l - 1$ be-

zeichnet. Wir schreiben an Stelle von (2)

$$(3)\quad f(\tau) = (\tau - \bar{\omega})^{-r} \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m^*(\omega, f)\, t^{m+\varrho} \left(\varrho = \frac{a}{l},\ 0 \leqq \varrho < 1,\ t^{\frac{1}{l}} = \frac{\tau - \omega}{\tau - \bar{\omega}} \right)$$

und nennen ϱ den Drehrest der Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$ oder auch von f in der Ecke ω, ebenso die Zahl $\varkappa$ aus [1]) (10) den Drehrest von $\{\Gamma, -r, v\}$ oder von v oder von f in der Spitze ξ von Γ. Analog [1]) (12a) gilt

$$(4)\quad b_m(L\tau_0, f) = \varrho_m(\tau_0, L)\, b_m(\tau_0, f),\ \varrho_m(\tau_0, L) = v(L) \frac{(\gamma\tau_0 + \delta)^r}{|\gamma\tau_0 + \delta|^{2r}} \left(\frac{\gamma\tau_0 + \delta}{\gamma\bar{\tau}_0 + \delta} \right)^m$$

und die entsprechende Gleichung für $b_m^*(\omega, f) = b_{lm+a}(\omega, f)$.

Unter der Voraussetzung $b_{m_0}(A, f) \neq 0$ bzw. $b_{m_0}(\tau_0, f) \neq 0$ bzw. $b_{m_0}(\omega, f) \neq 0$ heißt $m_0 + \varkappa$ bzw. m_0 bzw. $m_0 + \varrho$ die Ordnung von f im Punkte $\tau = \xi$ bzw. $\tau = \tau_0$ (Nichtfixpunkt) bzw. $\tau = \omega$. Wir bezeichnen die Ecken von $\mathfrak{K}$ (die ein volles System inäquivalenter Ecken von Γ bilden) mit ω_k, ihre Ordnungen mit l_k (l_k entspricht dem obigen l, $1 \leqq k \leqq e_0$); von den Konstanten

$$(5)\quad q_0 = \sigma_0 + \sum_{k=1}^{e_0} \left(1 - \frac{1}{l_k}\right) \text{ (Verzweigungsmaß)},$$

$$\varrho_0 = p_0 - 1 + \tfrac{1}{2} q_0 \text{ (Gruppenrang)}$$

ist die zweite stets positiv. Ein Fundamentalsatz, den wir im Folgenden oft, und meistens ohne ausdrückliches Zitat anwenden werden, besagt:

Die Summe der Ordnungen einer (nicht identisch verschwindenden) automorphen Form $\{\Gamma, -r, v\}$ in den sämtlichen Punkten von $\mathfrak{K}$ ist gleich $r\varrho_0$.

Daraus folgt, daß es außer Null keine ganzen Formen $\{\Gamma, -r, v\}$ mit $r < 0$ geben kann; eine ganze Form $\{\Gamma, 0, v\}$ mit $|v| = 1$ ist konstant. Ferner ist eine Form $\{\Gamma, -r, v\}$ mit reellem r und $|v| = 1$ durch ihre Ordnungen in den Punkten von $\mathfrak{K}$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Unter einem Divisor verstehen wir hier ein formales Potenzprodukt von Punkten aus $\mathfrak{K}$, das mit ganzen Exponenten α_h, β_k, λ_m und paarweise verschiedenen Nichtfixpunkten τ_m in der Gestalt

$$(6)\quad \mathfrak{d} = \prod_{h=1}^{\sigma_0} (\xi_h)^{\alpha_h} \prod_{k=1}^{e_0} (\omega_k)^{\beta_k} \prod_{m=1}^{d_0} (\tau_m)^{\lambda_m} \quad [\sigma_0, \xi_h \text{ vgl. } ^1),\ 1.\ \text{c.}]$$

geschrieben wird. Diese Divisoren werden wie Potenzprodukte rationaler Primzahlen multipliziert und dividiert. Ein Divisor (6) ändert sich durch Hinzufügen oder Unterdrücken endlich vieler Punkte mit den Exponenten Null definitionsgemäß nicht. Als Exponent eines in $\mathfrak{d}$ nicht auftretenden Punktes gilt dementprechend Null. Der Divisor, dessen sämtliche Exponenten verschwinden, wird mit $\langle 1 \rangle$ bezeichnet.

Der Divisor

$$\mathfrak{a} = \prod_{h=1}^{\sigma_0} (\xi_h)^{\vartheta_h}, \quad \vartheta_h = \begin{cases} 0 \text{ für } \varkappa_h > 0 \\ 1 \text{ für } \varkappa_h = 0 \end{cases} \qquad [\varkappa_h \text{ vgl. } ^1), \text{ l. c.}] \tag{7}$$

heißt der Ergänzungsdivisor von v oder von $\{\Gamma, -r, v\}$. Ein Divisor (6) mit lauter nicht negativen Exponenten heißt ein Polygon. Die Exponentensumme

$$\sum_{h=1}^{\sigma_0} \alpha_h + \sum_{k=1}^{e_0} \beta_k + \sum_{m=1}^{d_0} \lambda_m$$

wird als Ordnung von $\mathfrak{d}$ und mit ord $\mathfrak{d}$ bezeichnet. Eine Form $f(\tau) \subset \{\Gamma, -r, v\}$ wird ein Multiplum von $\mathfrak{d}$ genannt, in Zeichen $f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{d}}$, wenn entweder $f(\tau)$ identisch verschwindet oder anderenfalls die Ordnung von f in jedem Punkte von $\mathfrak{K}$ den Exponenten dieses Punktes in $\mathfrak{d}$ nicht unterschreitet. $f \subset \mathfrak{C}_r$ bedeutet $f \equiv 0 \pmod{\langle 1 \rangle}$, $f \subset \mathfrak{C}_r^+$ bedeutet $f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$.

Es bezeichne $\mathfrak{C}_r(\mathfrak{d}) = \mathfrak{C}(\Gamma, -r, v; \mathfrak{d})$ die Schar der Multipla von $\mathfrak{d}$ unter den Formen $\{\Gamma, -r, v\}$, $\nu_0(-r, v, \mathfrak{d})$ den Rang der Schar $\mathfrak{C}(\Gamma, -r, v; \mathfrak{d})$. Dann gilt der Riemann-Rochsche Satz in Gestalt des folgenden Reziprozitätsgesetzes:

$$\begin{aligned} \nu_0(-r, v, \mathfrak{d}) = &- \operatorname{ord} \mathfrak{d} + r\varrho_0 - \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h - \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k + \\ &- p_0 + 1 + \nu_0(r-2, v^{-1}, \mathfrak{a}\mathfrak{d}^{-1}); \end{aligned} \tag{8}$$

hier bedeuten $\varkappa_h$, ϱ_k die Drehreste der Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$ in den Spitzen ξ_h und den Ecken ω_k von $\mathfrak{K}$. Mit

$$a^+ = a^+(-r, v) = r\varrho_0 - \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h^+ - \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k \qquad (\varkappa_h^+ = \varkappa_h + \vartheta_h) \tag{9}$$

ergibt sich für die Ränge $\mu = \nu_0(-r, v, \mathfrak{a})$ von $\mathfrak{C}_r^+$ und $\nu_0(-r, v, \langle 1 \rangle)$ von $\mathfrak{C}_r$:

$$\begin{gathered} \mu = a^+ - p_0 + 1, \quad \nu_0(-r, v, \langle 1 \rangle) = \mu + \operatorname{ord} \mathfrak{a} \\ (r > 2, \ v \text{ beliebig und } r = 2, \ v \neq 1); \end{gathered} \tag{10}$$

allgemein gilt

$$\nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = - \operatorname{ord} \mathfrak{d} + a^+ - p_0 + 1 + \nu_0(r-2, v^{-1}, \mathfrak{d}^{-1}). \tag{8a}$$

Für eine ganze Spitzenform $f \subset \{\Gamma, -r, v\}$ bezeichnet a^+ die Gesamtanzahl der Nullstellen in $\mathfrak{K}$, die mit ihren Vielfachheiten, aber ohne die durch die Bedingung $f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ verursachten Beiträge $\varkappa_h^+$ bzw. ϱ_k zu zählen sind.

Die für $r > 2$, $|v| = 1$ absolut konvergenten Quersummen (Poincaré-Reihen)

$$G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, \nu) = \frac{1}{\Gamma(r-1)} \sum_{M \subset \mathfrak{S}(A, \Gamma)} e^{2\pi i(\nu+\varkappa)\frac{M\tau}{N}} (v(M)(m_1\tau + m_2)^r)^{-1} \tag{11}$$

$$(\nu + \varkappa > 0),$$

$$\Phi_{-r}(\tau, v, z, \Gamma, \nu) = \frac{1}{\Gamma(r-1)} \sum_{M \subset \Gamma} \left(\frac{M\tau - z}{M\tau - \bar{z}}\right)^{\nu} (v(M)(m_1\tau + m_2)^r (M\tau - \bar{z})^r)^{-1} \tag{12}$$

$$(\nu \geqq 0)$$

sind mit den folgenden Bedeutungen erklärt: $\zeta = A^{-1}\infty$ eine Spitze von Γ; A, N, $\varkappa$, $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$ nach [1] 1. c. d.; $v(M) = v(A)\,\sigma(A, L)\,v(L)$ für $M = AL \subset A\Gamma$ mit (wofern $A \subset \Gamma$) willkürlichem $v(A)$ des Betrages Eins; $r > 2$, $|v| = 1$, $z \subset \mathfrak{H}$, $\underline{M} = \{m_1, m_2\}$, ν ganz. Alle Quersummen (11) (12) stellen ganze Spitzenformen $\{\Gamma, -r, v\}$ dar. Für jedes $L_0 \subset \Gamma$ bestehen die Relationen

$$
\begin{aligned}
&G_{-r}(\tau, v, AL_0, \Gamma, \nu) = G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, \nu)\ (v(AL_0) = v(A)\,\sigma(A, L_0)\,v(L_0)),\\
&\Phi_{-r}(\tau, v, L_0 z, \Gamma, \nu) = \overline{v(L_0)}\,|\gamma_0 z + \delta_0|^{2r}\left(\frac{\gamma_0 \bar{z} + \delta_0}{\gamma_0 z + \delta_0}\right)^{\nu} \Phi_{-r}(\tau, v, z, \Gamma, \nu).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Die Quersummen (11) (12) genügen den metrischen Grundgleichungen

$$
\begin{aligned}
(\varphi(\tau), G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, \nu)) &= e_r(A, \Gamma, \nu)\ b_\nu(A, \varphi)\\
(\varphi(\tau), \Phi_{-r}(\tau, v, z, \Gamma, \nu)) &= \varepsilon_r(z, \Gamma, \nu)\ b_\nu(z, \varphi)
\end{aligned}
\qquad (\varphi \subset \mathfrak{C}_r^+)
\tag{14}
$$

mit gewissen elementaren und stets von Null verschiedenen Konstanten $e_r(A, \Gamma, \nu)$, $\varepsilon_r(z, \Gamma, \nu)$, deren genaue Werte im Folgenden keine Rolle spielen. Es sei von ihnen nur soviel gesagt, daß sie nach ihren expliziten Darstellungen für alle positiven r erklärt sind, woraus folgt, daß man auch den Funktionen $G_{-r}(\tau, v, A, \Gamma, \nu)$ und $\Phi_{-r}(\tau, v, z, \Gamma, \nu)$ für beliebige r, v mit $r > 0$, $|v| = 1$, und zwar ohne jede Rücksicht auf die Konvergenz irgendwelcher Reihen, vermöge der metrischen Formeln (14) einen eindeutig bestimmten Sinn beilegen kann. Die so erklärten Funktionen G_{-r}, Φ_{-r} gehören definitionsgemäß der Schar $\mathfrak{C}_r^+$ an und genügen nach (14) genau denselben Transformations- und Invarianzgleichungen, wie die für $r > 2$, $|v| = 1$ absolut konvergenten Reihen (11) (12).

Wir denken uns den kanonischen Fundamentalbereich $\mathfrak{K}$ von Γ fest und so gewählt, daß er, falls $\sigma_0 > 0$ ist (d. h. falls $\bar{\Gamma}$ parabolische Substitutionen enthält), den Rand von $\mathfrak{H}$ in der Spitze ∞ erreicht. Die hierzu erforderliche Bedingung, daß ∞ parabolischer Fixpunkt von Γ sei, läßt sich durch eine auf Γ auszuübende Transformation mit Hilfe einer passenden reellen unimodularen Matrix erfüllen. Im übrigen bedienen wir uns der Bezeichnungen von [1] c), nennen also $\xi_h = A_h^{-1}\infty$ die sämtlichen Spitzen von $\mathfrak{K}$, wobei wir $\xi_1 = \infty$, $A_1 = I$ und $a_{h1} > 0$ für $h > 1$ vorschreiben $(1 \leqq h \leqq \sigma_0)$; ω_k wie oben die sämtlichen Ecken von $\mathfrak{K}$, l_k ihre Ordnungen; $\varkappa_h$, $\varrho_k = \frac{a_k}{l_k}$ mit ganzen $a_k (1 \leqq k \leqq e_0)$ die Drehreste der Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$ in den Spitzen ξ_h und Ecken ω_k von $\mathfrak{K}$. Für festgewählte solche A_h schreiben wir

$$
\begin{aligned}
&H(\tau, \xi_h, \nu) = G_{-r}(\tau, v, A_h, \Gamma, \nu) \quad (\nu + \varkappa_h > 0,\ 1 \leqq h \leqq \sigma_0),\\
&H(\tau, \omega_k, \nu) = \Phi_{-r}(\tau, v, \omega_k, \Gamma, a_k + \nu l_k) \quad (0 \leqq a_k \leqq l_k - 1,\ \nu \geqq 0,\ 1 \leqq k \leqq e_0),\\
&H(\tau, \tau_0, \nu) = \Phi_{-r}(\tau, v, \tau_0, \Gamma, \nu) \quad (\tau_0 \text{ ein Nichtfixpunkt in } \mathfrak{K},\ \nu \geqq 0).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Dann gilt an Stelle von (14) und mit $\varepsilon_r^*(\omega_k, \Gamma, \nu) = \varepsilon_r(\omega_k, \Gamma, a_k + \nu l_k$ das System der Grundgleichungen

$$(16)\qquad \begin{aligned} (\varphi(\tau),\ H(\tau, \xi_h, \nu)) &= e_r(A_h, \Gamma, \nu)\ b_\nu(A_h, \varphi), \\ (\varphi(\tau),\ H(\tau, \omega_k, \nu)) &= \varepsilon^*(\omega_k, \Gamma, \nu)\ b_\nu^*(\omega_k, \varphi), \\ (\varphi(\tau),\ H(\tau, \tau_0, \nu)) &= \varepsilon_r(\tau_0, \Gamma, \nu)\ b_\nu(\tau_0, \varphi). \end{aligned} \qquad \varphi \subset \mathfrak{C}_n^-$$

Wir setzen im Folgenden $\mu > 0$ voraus; für $\mu = 0$ ist die Problem stellung inhaltlos. $\mu > 0$ hat zur Folge, daß die in (9) erklärte Zahl $a^+ \geqq 0$ ausfällt.

Aus der Theorie der Multiplikatoren benötigen wir die folgenden Aussagen: Bedeuten $\hat{\varkappa}_h$, $\hat{\varrho}_k$ die Drehreste der Klasse $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ in ξ_h bzw. ω_k, so gilt

$$(17)\qquad \hat{\varkappa}_h = 1 - \varkappa_h^+ \text{ [vgl. (9)]}\ (1 \leqq h \leqq \sigma_0),\ \hat{\varrho}_k = 1 - \frac{1}{l_k} - \varrho_k\ (1 \leqq k \leqq e_0).$$

Die einzige (notwendige und hinreichende) Existenzbedingung für ein Multiplikatorsystem $v \subset [\Gamma, -r]$ besteht in der Kongruenz

$$(18)\qquad \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h + \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k \equiv r\,\varrho_0 \pmod 1;$$

daß diese eine notwendige Bedingung darstellt, folgt bereits aus der Ganzzahligkeit von a^+.

Im Rahmen der Divisorentheorie sind die Primformen von hervorragender Bedeutung. Es sei w ein beliebiger Punkt in $\mathfrak{K}$. Die zum Punkte w gehörige automorphe Primform $Z(\tau, w)$ ist eine ganze Form $\{\Gamma, -r_0, u_w\}$ mit $r_0 \varrho_0 = 1$ und einem Multiplikatorsystem $u_w \subset [\Gamma, -r_0$ des Betrages Eins. $Z(\tau, w)$ verschwindet in $\mathfrak{K}$ nirgends außer in w und hat dort die Ordnung 1. $Z(\tau, w)$ ist durch diese Eigenschaften bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Um $Z(\tau, w$ völlig festzulegen, kann man dem ersten Entwicklungskoeffizienten von Z im Punkte w den Wert 1 erteilen. Dies besagt

$$b_1(A_h, Z(\tau, \xi_h)) = 1\ (w = \xi_h),\quad b_1^*(\omega_k, Z(\tau, \omega_k)) = 1\ (w = \omega_k),$$
$$b_1(\tau_0, Z(\tau, \tau_0)) = 1\ (w = \tau_0 \text{ ein Nichtfixpunkt}).$$

3. Es sei $r > 0$, $|v| = 1$. Einem beliebigen Polygon $\mathfrak{d}$ von der Gestalt (6) ordnen wir das wie folgt erklärte Funktionensystem $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ zu: $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ bestehe aus den ord $\mathfrak{d}$ Funktionen

$$(19)\qquad \begin{aligned} &H(\tau, \xi_h, \nu_h + \vartheta_h)\ (\vartheta_h \text{ nach (7)},\ 0 \leqq \nu_h \leqq \alpha_h - 1,\ 1 \leqq h \leqq \sigma_0), \\ &H(\tau, \omega_k, \nu_k)\ (0 \leqq \nu_k \leqq \beta_k - 1,\ 1 \leqq k \leqq e_0), \\ &H(\tau, \tau_m, \nu_m)\ (0 \leqq \nu_m \leqq \lambda_m - 1,\ 1 \leqq m \leqq d_0). \end{aligned}$$

$\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ enthält also sinngemäß zu fest gegebenem h bzw. k bzw. m keine der Funktionen

$$H(\tau, \xi_h, \nu + \vartheta_h) \text{ bzw. } H(\tau, \omega_k, \nu) \text{ bzw. } H(\tau, \tau_m, \nu)\ (\nu \geqq 0),$$

wenn α_h bzw. β_k bzw. λ_m verschwindet. — Wir behaupten

Satz 1. *Wenn* $\operatorname{ord}\mathfrak{d} = a^+ + 1$ *ist, so spannen die Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *die volle Schar* $\mathfrak{C}_r^+$ *auf. Ihre Anzahl ist um höchstens* p_0 *größer, als der Rang* μ *von* $\mathfrak{C}_r^+$.

Beweis. Es bezeichne $\mathfrak{N}(\mathfrak{d})$ die Normalschar von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ in $\mathfrak{C}_r^+$, d. h. die Schar der auf allen Formen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ senkrechten Formen von $\mathfrak{C}_r^+$. Nach (16) bedeutet $\varphi \subset \mathfrak{N}(\mathfrak{d})$, daß die sämtlichen Entwicklungskoeffizienten

$$b_{\nu_h + \vartheta_h}(A_h, \varphi) \quad (0 \leqq \nu_h \leqq \alpha_h - 1,\ 1 \leqq h \leqq \sigma_0)$$

(19a) $$b^*_{\nu_k}(\omega_k, \varphi) \quad (0 \leqq \nu_k \leqq \beta_k - 1,\ 1 \leqq k \leqq e_0),$$

$$b_{\nu_m}(\tau_m, \varphi) \quad (0 \leqq \nu_m \leqq \lambda_m - 1,\ 1 \leqq m \leqq d_0)$$

verschwinden. Daher ist φ offenbar ein Multiplum von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$. Wenn nun die Form φ nicht identisch verschwände, so hätte sie, abgesehen von den festen Beiträgen $\varkappa_h^+$ und ϱ_k in den Spitzen und Ecken, mehr als a^+ Nullstellen in $\mathfrak{K}$. Dies ist unmöglich. Also verschwindet φ identisch. Andrerseits spannen die Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ die volle Schar der zu $\mathfrak{N}(\mathfrak{d})$ orthogonalen Formen von $\mathfrak{C}_r^+$ auf. Daraus folgt die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung ergibt sich nach (8a) aus

$$a^+ + 1 - \mu = p_0 - \nu_0(r-2,\ v^{-1},\ \langle 1\rangle) \leqq p_0. \quad -$$

Es sei wie oben $r > 0$, $|v| = 1$, $\mathfrak{d}$ ein Polygon (dessen Ordnung zunächst keiner Einschränkung unterliegt), $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ werde durch (19) erklärt. Wenn ein nicht identisch verschwindendes Multiplum von $\mathfrak{d}^{-1}$ in $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ existiert, so gilt für die Summe seiner Ordnungen in $\mathfrak{K}$

$$(2-r)\left(p_0 - 1 + \frac{q_0}{2}\right) \geqq -\operatorname{ord}\mathfrak{d} + \sum_{h=1}^{\sigma_0} \hat{\varkappa}_h + \sum_{k=1}^{e_0} \hat{\varrho}_k,$$

also nach (5), (8a), (17)

$$\sum_{h=1}^{\sigma_0} \hat{\varkappa}_h + \sum_{k=1}^{e_0} \hat{\varrho}_k = q_0 - \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h^+ - \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k,$$

$$\operatorname{ord}\mathfrak{d} \geqq a^+ - 2p_0 + 2 = \mu - p_0 + 1 - \nu_0(r-2,\ v^{-1},\ \langle 1\rangle).$$

Es sei nun $a^+ - 2p_0 + 1 \geqq 0$, $\operatorname{ord}\mathfrak{d} \leqq a^+ - 2p_0 + 1$. Dann verschwindet $\nu_0(r-2,\ v^{-1},\ \mathfrak{d}^{-1})$, folglich auch $\nu_0(r-2,\ v^{-1},\ \langle 1\rangle)$, und wir erhalten mit $n = \operatorname{ord}\mathfrak{d}$:

(20) $$\nu_0(-r,\ v,\ \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = -\operatorname{ord}\mathfrak{d} + a^+ - p_0 + 1 = \mu - n.$$

Eine Form $\varphi \subset \mathfrak{C}_r^+$ steht dann und nur dann auf dem vollen System $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ senkrecht, wenn sie Multiplum von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ ist. Daher spannen die μ Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ die Normalschar zur Schar der Multipla von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ auf. Diese Normalschar hat nach (20) den Rang n, folglich sind die sie aufspannenden Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ linear unabhängig. — Dies besagt

Satz 2. *Es sei* $r > 0$, $|v| = 1$. *Die Zahl* $a^+ - 2p_0 + 1$ *stimmt, wenn sie nicht negativ ist, mit* $\mu - p_0$ *überein, d. h. es verschwindet* $\nu_0(r-2, v^{-1}, \langle 1\rangle)$. *Es sei* $\mathfrak{d}$ *ein Polygon einer Ordnung* $n \leqq a^+ - 2p_0 +$ *Dann sind die* n *Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *linear unabhängig, und die von ihnen aufgespannte Schar ist die Normalschar zur Schar aller Multipla von* $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ *in* $\mathfrak{C}^+(\Gamma, -r, v)$.

Die in diesem Satze auftretende ganze Zahl $a^+ - 2p_0 + 1$ ist wegen

$$a^+ - 2p_0 + 2 \geqq q_0 + (r-2)\varrho_0 - q_0 = (r-2)\varrho_0 \tag{21}$$

für $r > 2$ stets nicht negativ. Bestimmt man irgend ein Multiplikatorsystem

$$v \in [\Gamma, -2] \text{ mit } \varkappa_h > 0 \ (1 \leqq h \leqq \sigma_0), \ \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h = 1, \ \varrho_k = 1 - \frac{1}{l_k} \ (1 \leqq k \leqq e_0$$

so wird $a^+ - 2p_0 + 1 = \sigma_0 - 2$ $(r = 2)$. Dies gilt also für eine von $2p_0 + \sigma_0 - 1$ reellen Parametern abhängige Schar von Multiplikatorsystemen $[\Gamma, -2]$ des Betrages Eins. Daß $a^+ - 2p_0 + 1$ auch für $r <$ positiv ausfallen kann, erkennt man wie folgt: Man setze

$$r = 2 - s \ (0 < s < 2, \ s \text{ reell}), \ s\varrho_0 \not\equiv 0 \pmod 1, \ m_0 = [s\varrho_0],$$

$$\varkappa_h > 0 \ (1 \leqq h \leqq \sigma_0), \ \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h = m_0 + 1 - s\varrho_0, \quad \varrho_k = 1 - \frac{1}{l_k} \ (1 \leqq k \leqq e_0$$

Die entsprechend bestimmten Multiplikatorsysteme $[\Gamma, -r]$ des Betrages Eins hängen wieder von $2p_0 + \sigma_0 - 1$ reellen Parametern ab, und es wird nun

$$a^+ - 2p_0 + 1 = \sigma_0 - m_0 - 2. \ —$$

Unter einer Teilerkette verstehen wir ein System von Polygonen

$$\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{d}_t, \ldots, \mathfrak{d}_s = \mathfrak{d} \text{ mit } \mathfrak{d}_t | \mathfrak{d}_{t+1}, \quad \operatorname{ord}\mathfrak{d}_{t+1} - \operatorname{ord}\mathfrak{d}_t > 0 \ (1 \leqq t \leqq s-1). \tag{22}$$

Wir setzen $n_t = \operatorname{ord}\mathfrak{d}_t$ $(1 \leqq t \leqq s)$, $n_s = n$ und bezeichnen mit $\mathfrak{S}_t$ die lineare Schar der Multipla von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_t$, mit $\mathfrak{N}_t$ die Normalschar von $\mathfrak{S}_t$ in $\mathfrak{C}_r^+$ $(1 \leqq t \leqq s)$, mit $\mathfrak{M}_{t+1}$ die Normalschar von $\mathfrak{S}_{t+1}$ in $\mathfrak{S}_t$ $(1 \leqq t \leqq s-1)$; $\mathfrak{M}_1$ sei mit $\mathfrak{N}_1$ identisch. Es gelten die direkten Zerlegungen in paarweise orthogonale Summanden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_r^+ &= \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{S}_2 = \cdots \\ &= \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_t + \mathfrak{S}_t \ (1 \leqq t \leqq s); \end{aligned} \tag{23}$$

danach ist $\mathfrak{N}_t = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_t$ $(1 \leqq t \leqq s)$.

Unter der Voraussetzung $0 < n = \operatorname{ord}\mathfrak{d} \leqq a^+ - 2p_0 + 1$ soll ein Verfahren zur expliziten Bestimmung einer Basis für jede der Scharen $\mathfrak{M}_t$ entwickelt werden. Zu diesem Zwecke stellen wir zunächst fest, daß die n_t Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$ eine Basis von $\mathfrak{N}_t$ bilden. Wir führen für die Funktionen der Systeme $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$ $(1 \leqq t \leqq s)$ die folgenden ab

kürzenden Bezeichnungen ein:

$$G_i(\tau) \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{d}_1) \quad (1 \leqq i \leqq n_1); \quad G_i(\tau) \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{d}_2) \quad (n_1 < i \leqq n_2); \cdots;$$

(24) $$G_i(\tau) \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t) \quad (n_{t-1} < i \leqq n_t); \cdots; \quad G_i(\tau) \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{d}_s) = \mathfrak{G}(\mathfrak{d})$$
$$(n_{s-1} < i \leqq n_s = n); \quad \mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t) \subset \mathfrak{G}(\mathfrak{d}_{t+1}) \quad (1 \leqq t \leqq s-1).$$

Ferner nennen wir $b_i(\varphi)$ denjenigen Entwicklungskoeffizienten der allgemeinen Form $\varphi \subset \mathfrak{C}_r^+$, welcher mit $G_i(\tau)$ nach der auf $G_i(\tau)$ anzuwendenden metrischen Formel (16), also gemäß

$$(\varphi, G_i) = C_i b_i(\varphi) \quad (C_i = e_r, \ \varepsilon_r^* \text{ oder } \varepsilon_r)$$

zusammenhängt.

Eine Basis von $\mathfrak{M}_1$ wird von den Funktionen $G_i(\tau)$ $(1 \leqq i \leqq n_1)$ von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_1)$ gebildet. Sei $2 \leqq t \leqq s$. Aus $\mathfrak{N}_t = \mathfrak{N}_{t-1} + \mathfrak{M}_t$, $\mathfrak{M}_t \subset \mathfrak{S}_{t-1}$ und der Orthogonalität von $\mathfrak{N}_{t-1}$ und $\mathfrak{S}_{t-1}$ folgt, daß $\mathfrak{M}_t$ die Normalschar zu $\mathfrak{N}_{t-1}$ in $\mathfrak{N}_t$ ist. Daher erhält man eine Basis von $\mathfrak{M}_t$ in denjenigen Linearkombinationen

(25) $$G_i^*(\tau) = G_i(\tau) - \sum_{\nu=1}^{n_{t-1}} \lambda_{i\nu} G_\nu(\tau) \qquad (n_{t-1} < i \leqq n_t)$$

der Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$, welche auf $\mathfrak{N}_{t-1}$ senkrecht stehen, also die Relationen

$$\sum_{\nu=1}^{n_{t-1}} \lambda_{i\nu}(G_\nu, G_k) = (G_i, G_k) \qquad (n_{t-1} < i \leqq n_t, \ 1 \leqq k \leqq n_{t-1})$$

erfüllen. Diese Gleichungen sind nach den $\lambda_{i\nu}$ eindeutig auflösbar; die Auflösung kann sich der Darstellung

(26) $$\sum_{\nu=1}^{n_{t-1}} \lambda_{i\nu} b_k(G_\nu) = b_k(G_i) \qquad (n_{t-1} < i \leqq n_t, \ 1 \leqq k \leqq n_{t-1})$$

des obigen Gleichungssystems bedienen und gelangt damit in dem Falle $r > 2$ auf Grund der expliziten Bestimmung der $b_k(G_\nu)$, $b_k(G_i)$ zu expliziten Darstellungen der Basisformen $G_i^*(\tau)$ $(n_{t-1} + 1 \leqq i \leqq n_t)$ von $\mathfrak{M}_t$. Wir formulieren das Ergebnis in dem folgenden

Satz 3. *Zu jeder Teilerkette* (22) *gehört eine Zerlegung* $\mathfrak{C}_r^+ = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_s + \mathfrak{S}_s$ *von* $\mathfrak{C}_r^+$ *in paarweise orthogonale Summanden. Hier bezeichnet* $\mathfrak{S}_t = \mathfrak{M}_{t+1} + \cdots + \mathfrak{M}_s + \mathfrak{S}_s$ *die Schar der Multipla von* $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_t$ *und daher* $\mathfrak{N}_t = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_t$ *die Normalschar zu* $\mathfrak{S}_t$ *in* $\mathfrak{C}_r^+$ $(1 \leqq t \leqq s)$. *Es sei* $0 < n = \operatorname{ord} \mathfrak{d} \leqq a^+ - 2p_0 + 1$. *Dann bilden die Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$ *eine Basis von* $\mathfrak{N}_t$. *Für* $2 \leqq t \leqq s$ *ergibt sich eine Basis von* $\mathfrak{M}_t$ *in Gestalt der Linearkombinationen* (25) *der Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$. *Die Koeffizienten* $\lambda_{i\nu}$ *dieser Linearkombinationen sind durch Auflösung der linearen Gleichungen* (26) *zu gewinnen. Als Koeffizienten dieser linearen Gleichungen ergeben sich gewisse der Entwicklungskoeffizienten* (19 a), *gebildet für die Parameter der Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$; *dabei durchläuft überdies* φ *die Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}_t)$.

Die oben bewiesenen Sätze können auf Grund des metrischen Zusammenhanges (16) zwischen den Funktionen H und den Entwicklungskoeffizienten b, b^* als Aussagen über die Struktur automorpher Formenscharen aufgefaßt und formuliert werden. Um insbesondere den Hauptsatz 2 in diesem Sinne zu interpretieren, bilden wir zu einem gegebenen Polygon $\mathfrak{d}$ den Vektor $\mathfrak{z}(\mathfrak{d}, \varphi)$ mit den Komponenten (19a) in irgend einer bestimmten, etwa der in (19a) angegebenen Anordnung ($\varphi \subset \mathfrak{C}_r^+$). Bezeichnet $\varphi_j(\tau)$ $(1 \leqq j \leqq \mu)$ eine beliebige fest gewählte Basis von $\mathfrak{C}_r^+$, so verstehen wir unter $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ die Matrix mit der j-ten Zeile $\mathfrak{z}(\mathfrak{d}, \varphi_j)$ $(1 \leqq j \leqq \mu)$; $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ hat also μ Zeilen und $\operatorname{ord}\mathfrak{d}$ Spalten. Über $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ gilt der folgende

Satz 4. *Es sei* $r > 0$, $|v| = 1$, $a^+ - 2p_0 + 1 > 0$ *und* $\mathfrak{d}$ *ein Polygon der positiven Ordnung* $n \leqq a^+ - 2p_0 + 1$. *Dann hat* $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ *den Rang* n; *es sind also alle Spalten von* $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ *linear unabhängig.*

Beweis. Für eine Form $\varphi(\tau) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \varphi_\nu(\tau)$ (ξ_ν konstant) aus $\mathfrak{C}$ bedeutet $\varphi \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$, daß das algebraische Skalarprodukt des Vektors $\mathfrak{x} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ mit jeder Spalte von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ verschwindet. Bezeichnet ϱ den Rang von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$, so ist also $\nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = \mu - \varrho$. Daraus folgt nach (20) die Behauptung.

Wir heben die folgenden Sonderfälle hervor:

Satz 5. *Es sei* $r > 0$, $|v| = 1$, $a^+ - 2p_0 + 1 > 0$; *man bestimme* $\mu - p_0$, *also* $a^+ - 2p_0 + 1$ *paarweise verschiedene Nichtfixpunkte* τ_k *im Fundamentalbereich* $\mathfrak{R}$ $(1 \leqq k \leqq \mu - p_0)$. *Dann hat die (für eine beliebige Basis* φ_j *von* $\mathfrak{C}_r^+$ *gebildete) Matrix* $(\varphi_j(\tau_k))$ $(1 \leqq j \leqq \mu,\ 1 \leqq k \leqq \mu - p_0)$ *den Rang* $\mu - p_0$.

Satz 6. *Es sei* $r > 0$, $|v| = 1$, $a^+ - 2p_0 + 1 > 0$. *Zu jedem Punkte* $\tau = \tau_0 = \xi_h, \omega_k, z$ (= *Nichtfixpunkt) in* $\mathfrak{R}$ *gibt es eine Basis* φ_j $(1 \leqq j \leqq \mu)$ *von* $\mathfrak{C}_r^+$ *der folgenden Beschaffenheit: Für* $1 \leqq j \leqq \mu$, $1 \leqq \nu \leqq \mu - p_0$ *gilt entsprechend* $\tau_0 = \xi_h, \omega_k, z$:

$$b_{\nu+\vartheta_h}(A_h, \varphi_j) \text{ bzw. } b_\nu^*(\omega_k, \varphi_j) \text{ bzw. } b_\nu(z, \varphi_j) = \left\{ \begin{matrix} 1\ (\nu = j) \\ 0\ (\nu \neq j) \end{matrix} \right\}.$$

Ein anderer Sonderfall läßt sich in einen allgemeineren Zusammenhang einordnen, den wir jetzt formulieren wollen. Zu diesem Zwecke verabreden wir die folgende Terminologie: Eine Form $F(\tau) \subset \{\Gamma, -r, v\}$ (r reell, $|v| = 1$) heiße ein genaues Multiplum des Divisors $\mathfrak{d}$ (der etwa in der Gestalt (6) mit ganzen Exponenten gegeben sei), wenn ihre Ordnungen in allen Punkten von $\mathfrak{R}$, abgesehen von den Bruchbestandteilen in den Fixpunkten, mit den Exponenten, die diese Punkte in $\mathfrak{d}$ tragen, übereinstimmen. Dabei gilt es als selbstverständlich, daß die Punkte τ_m in der Darstellung (6) paarweise verschiedene Nichtfixpunkte in $\mathfrak{R}$ sind.

Nach den Überlegungen, die zum Beweise von Satz 2 führten, besteht der folgende

Satz 7. *Es sei* $r>0$, $|v|=1$, $a^+-2p_0+1\geqq 0$, $\mathfrak{d}$ *ein Polygon. Wenn es außer Null ein Multiplum* $F(\tau)$ *von* $\mathfrak{d}^{-1}$ *in* $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ *gibt, so gilt* $\operatorname{ord}\mathfrak{d}\geq\mu-p_0+1$. *Bezeichnet* $\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{g}$ *den Divisor, dessen genaues Multiplum* $F(\tau)$ *ist, so stellt* $\mathfrak{g}$ *ein Polygon dar, und es gilt* $\operatorname{ord}\mathfrak{d}=\mu-p_0+1+\operatorname{ord}\mathfrak{g}$. *Ein genaues Multiplum von* $\mathfrak{d}^{-1}$ *in* $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ *ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt, und* $\mathfrak{d}$ *hat dann die Ordnung* $\mu-p_0+1$.

Zu der gegebenen Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$ existiert natürlich immer ein Divisor $\mathfrak{d}$, aber keineswegs immer ein Polygon $\mathfrak{d}$ derart, daß die Klasse $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ ein genaues Multiplum von $\mathfrak{d}^{-1}$ enthält. Wir werden jedoch im nächsten Abschnitt zeigen, daß dennoch ein solches Polygon $\mathfrak{d}$ existiert, vorausgesetzt lediglich, daß die positive Zahl r nicht gar zu klein ist.

Es sei $\tau=w$ ein beliebiger fester Punkt in $\mathfrak{R}$ ($w=\zeta_h$ oder $=\omega_k$ oder ein Nichtfixpunkt). Aus Satz 7 folgt in der Terminologie von [3]) 1., § 1:

Satz 7a. *Die ersten* $\mu-p_0$ *Werte* $\nu=1, 2, \ldots, \mu-p_0$ *sind sämtlich Lücken in den Polordnungen der auf* $\mathfrak{R}$ *außerhalb von* w *regulären Formen* $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$. *Die niedrigste mögliche Polordnung ist also* $\mu-p_0+1$.

4. Im Folgenden können und wollen wir, da das Konstruktionsproblem der vorliegenden Arbeit für $p_0=0$ als gelöst gelten kann, $p_0>0$ voraussetzen. Zur expliziten Bestimmung eines Systems von mehr als $\mu-p_0$ linear unabhängigen Quersummen H dienen die folgenden Sätze, deren Beweise wir nach dem Verfahren der unter [3]) zitierten Untersuchungen auf den Riemann-Rochschen Satz und in Verbindung damit auf Aussagen über den Rang der Matrizen $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ zurückführen.

Satz 8. *Es sei* $r>0$, $|v|=1$, $a^+-2p_0+1\geq 0$, $\mathfrak{d}$ *ein beliebiges Polygon von einer der Ordnungen* $\mu-p_0+k$ $(1\leq k\leq p_0)$. *Wenn es außer Null kein Multiplum von* $\mathfrak{d}^{-1}$ *in* $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ *gibt, so sind die* $\mu-p_0+k$ *Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *linear unabhängig.*

Beweis. Aus (8a) und den Voraussetzungen folgt

$$\nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d})=-\operatorname{ord}\mathfrak{d}+a^+-p_0+1=p_0-k. \tag{27}$$

Bezeichnet ferner ϱ den Rang von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$, so wird nach (27) und dem Beweise von Satz 4:

$$\mu-\varrho=p_0-k,\quad \varrho=\mu-p_0+k=\operatorname{ord}\mathfrak{d}.$$

Also sind die sämtlichen Spalten von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ und mit ihnen die Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ linear unabhängig. —

Versteht man unter $F(\tau)$ eine nicht konstante ganze Form, so erweist sich $F(\tau)^{-1}$ stets als das genaue Multiplum eines reziproken Polygons. Die Umkehrung dieser Aussage trifft nicht allgemein zu. Wir verstehen, um den allgemeinen Fall zu betrachten, unter $\mathfrak{d}$ ein Polygon, unter $F(\tau)$ eine automorphe Form reeller Dimension $+r$, zu einem Multiplikatorsystem v, des Betrages Eins, nehmen an, daß F

ein genaues Multiplum von $\mathfrak{d}^{-1}$ sei und untersuchen unter der weiteren Voraussetzung $a^+ - 2p_0 + 1 \geqq 0$ die Formenklasse $\{\Gamma, -r, v\}$ ($r = 2 + r_1$, $v = v_1^{-1}$). Dann gelten die folgenden Sätze:

Satz 9. *(Voraussetzungen): Es sei* $r > 0$, $|v| = 1$, $a^+ - 2p_0 + 1 \geqq 0$; *es gebe in der Klasse* $\{\Gamma, r-2, v^{-1}\}$ *ein genaues Multiplum von* $\mathfrak{d}^{-1}$, *wo* $\mathfrak{d}$ *ein Polygon bezeichnet. (Behauptung): Tilgt man von der* $\operatorname{ord}\mathfrak{d} = \mu - p_0 + 1$ *Quersummen des Systems* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *irgend eine (einzige, derjenigen, welche unter allen zu den einzelnen Punkten* $\zeta_h(\alpha_h > 0)$, *bzw.* $\omega_k(\beta_k > 0)$, *bzw.* $\tau_m(\lambda_m > 0)$ *gehörigen die höchsten Parameterwerte* $\nu_h = \alpha_h - 1$, *bzw.* $\nu_k = \beta_k - 1$, *bzw.* $\nu_m = \lambda_m - 1$ *aufweisen, so sind die übrigbleibenden Funktionen linear unabhängig, die getilgte Funktion aber läßt sich linear mit konstanten Koeffizienten aus den übrigbleibenden kombinieren.*

Zum Beweise erschließt man für irgend einen der mit $\alpha_h > 0$, bzw. $\beta_k > 0$, bzw. $\lambda_m > 0$ in $\mathfrak{d}$ auftretenden Punkte $w = \zeta_h$, bzw. $w = \omega_k$, bzw. $w = \tau_m$ aus dem Riemann-Rochschen Satz (8 a):

$$\nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^{-1}) = \nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = p_0.$$

Daraus folgt, daß die Matrizen $\mathsf{M}(\mathfrak{d}(w)^{-1})$ und $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ den gleichen Rang $\mu - p_0$ haben, und dies besagt, daß die Funktionen von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}(w)^{-1})$ linear unabhängig sind, die von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ hingegen nicht. —

Beachtet man, daß eine automorphe Form reeller Dimension mit Multiplikatoren des Betrages 1 durch ihre Ordnungen in den Punkten von $\mathfrak{R}$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist, so erhält man

Satz 10. *Unter den Voraussetzungen von Satz 9 bezeichne* v^* *ein von* v *verschiedenes Multiplikatorsystem* $[\Gamma, -r]$ *derart, daß die Klassen* $\{\Gamma, -r, v\}$ *und* $\{\Gamma, -r, v^*\}$ *die gleichen Drehreste aufweisen. Dann sind die* $\mu - p_0 + 1$ *Funktionen von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$, *gebildet für die Klasse* $\{\Gamma, -r, v^*\}$, *linear unabhängig.*

Die Multiplikatorsysteme $[\Gamma, -r]$ des Betrages 1 mit gegebenen Drehresten hängen von $2p_0$ reellen Parametern ab. —

Satz 11. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 9 erfüllt und man kenne ein Polygon* $\mathfrak{d}'$, *welches nicht als Nenner einer automorphen Funktion* $\{\Gamma, 0, 1\}$ *auftreten kann (d. h. es gebe keine nicht-konstante automorphe Funktion, die ein Multiplum von* $\mathfrak{d}'^{-1}$ *ist). Man zerlege das System* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d}\mathfrak{d}')$ *in die elementfremden Systeme* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *und* $\mathfrak{G}_1(\mathfrak{d}\mathfrak{d}')$, *tilge aus* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *eine der in Satz 9 angegebenen Funktionen und bezeichne das aus* $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ *durch diese Tilgung entstehende System mit* $\mathfrak{G}^*(\mathfrak{d})$. *Dann sind die* $\mu - p_0 + n'$ ($n' = \operatorname{ord}\mathfrak{d}'$) *Funktionen der Vereinigung* $\mathfrak{G}^*(\mathfrak{d}) + \mathfrak{G}_1(\mathfrak{d}\mathfrak{d}')$ *linear unabhängig.*

Beweis. Da die Schar der Multipla von $\mathfrak{d}'^{-1}$ in $\{\Gamma, 0, 1\}$ aus den Konstanten allein besteht, findet man nach (8 a)

$$\begin{aligned}\nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{d}') &= -(\mu - p_0 + 1) - n' + a^+ - p_0 + 1 + \\ &\quad + \nu_0(r-2, v^{-1}, \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{d}'^{-1}) = p_0 - n'.\end{aligned}$$

Bezeichnet ϱ' den Rang von $\mathsf{M}(\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}')$, so ergibt sich $\mu - \varrho' = p_0 - n'$, daher $\varrho' = \mu - p_0 + n'$. Diese Zahl ist um Eins kleiner als die Spaltenzahl von $\mathsf{M}(\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}')$, folglich sind diese Spalten nach Tilgung einer passend bestimmten unter ihnen linear unabhängig. —

Kennt man eine natürliche Zahl P derart, daß keine nicht konstante automorphe Funktion $\{\Gamma, 0, 1\}$ existiert, welche jeden Wert höchstens P-mal annimmt, so kann in Satz 11 für $\mathfrak{d}'$ irgend ein Polygon der Ordnung P gewählt werden. —

Wir wollen weiter annehmen, daß die Voraussetzungen von Satz 9 erfüllt seien. Wir bilden für ganzes $m \geqq 0$ und einen beliebigen Punkt w in $\mathfrak{R}$ die Zahlen

$$u_m = \nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^m) - \nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^{m+1}) \qquad (m \geqq 0),$$
$$u'_m = \nu_0(r-2, v^{-1}, \mathfrak{d}^{-1}(w)^{-m}) - \nu_0(r-2, v^{-1}, \mathfrak{d}^{-1}(w)^{-m+1}) \qquad (m \geqq 1).$$

Nach (8a) gilt, weil $\nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^{m+1})$ für $m \geqq 2p_0 - 2$ offenbar verschwindet.

$$\nu_0(-r, v, \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = \sum_{m=0}^{2p_0-2} u_m = -(\mu - p_0 + 1) + a^+ - p_0 + 2 = p_0;$$

$$0 \leqq u_m \leqq 1,\ 0 \leqq u'_m \leqq 1;\quad u_m + u'_{m+1} = 1 \qquad (m \geqq 0).$$

Es seien $m+1 = h_i = h_i(w)$ $(1 \leqq i \leqq p_0)$ die Weierstrassschen Lückenzahlen des Punktes w im klassischen Sinne; sie können zunächst natürlich für $r = 2$, $v = 1$, $\mathfrak{d} = \langle 1\rangle$, unter den genannten Voraussetzungen aber auch für die hier vorgegebenen $r, v, \mathfrak{d}$ durch $u'_{h_i} = 0$, also durch $u_{h_i-1} = 1$ definiert werden. Ihre Bedeutung für die Schar $\mathfrak{C}_r^+$ geht aus der folgenden Überlegung hervor:

Es bezeichne φ_j $(1 \leqq j \leqq \mu)$ irgend eine fest gewählte Basis von $\mathfrak{C}_r^+$. Wir bilden die Spalten $\mathfrak{b}_\nu(w)$ mit den Komponenten

$$(28)\qquad \begin{matrix} b_{\nu+\vartheta_h}(A_h, \varphi_j)\ (w = \xi_h), \quad \text{bzw. } b^*_\nu(\omega_k, \varphi_j)\ (w = \omega_k), \\ \text{bzw. } b_\nu(z, \varphi_j)\ (w = \text{Nichtfixpunkt } z), \end{matrix} \qquad (\nu \geqq 0)$$

($j = 1, 2, \ldots, \mu$ stellt den Zeilenindex der betreffenden Spalte dar). Es sei λ_0 der Exponent von w in $\mathfrak{d}$. Wir betrachten die folgendermaßen erklärte Matrix M^*_m: Ihre ersten $\mu - p_0 + 1$ Spalten sind mit den Spalten von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ identisch, ihre restlichen m Spalten sind die soeben definierten $\mathfrak{b}_{\lambda_0+\nu}$ $(0 \leqq \nu \leqq m-1,\ m \geqq 1)$. Eine Form $\varphi(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \xi_\nu \varphi_\nu(\tau)$ aus $\mathfrak{C}_r^+$, deren Koeffizientenvektor $\mathfrak{x} = \langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu\rangle$ die Eigenschaft hat, daß sein algebraisches Skalarprodukt mit jeder Spalte von M^*_m verschwindet, ist ein Multiplum von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^m$ und umgekehrt. Daher bedeutet $u_m = 0$, daß $\mathfrak{b}_{\lambda_0+m}$ sich aus den Spalten von M^*_m linear mit skalaren Koeffizienten kombinieren läßt, $u_m = 1$, daß dies nicht möglich ist. Wenn nun das algebraische Skalarprodukt von $\mathfrak{x}$ mit jeder Spalte von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ und mit jeder Spalte $\mathfrak{b}_{\lambda_0+h_i-1}(w)$ $(1 \leqq i \leqq p_0)$ verschwindet, so heißt dies, daß φ ein Multiplum von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^{h_{p_0}}$, also von $\mathfrak{a}\mathfrak{d}(w)^n$ für jedes

natürliche n ist, also daß φ identisch verschwindet. Es sei $\tilde{\mathsf{M}}(\mathfrak{d}, w)$ die Matrix, deren erste $\mu - p_0 + 1$ Spalten mit denen von $\mathsf{M}(\mathfrak{d})$ übereinstimmen und als deren restliche Spalten die $\mathfrak{b}_{\lambda_0+h_i-1}(w)$ $(1 \leqq i \leqq p_0)$ auftreten. Da die algebraische Orthogonalität des Vektors $\mathfrak{x}$ zu den Spalten von $\tilde{\mathsf{M}}(\mathfrak{d}, w)$ das Verschwinden aller ξ_ν nach sich zieht, hat $\tilde{\mathsf{M}}(\mathfrak{d}, w)$ den Rang μ, und daher gilt

Satz 12. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 9 erfüllt, und es sei w ein beliebiger Punkt in $\mathfrak{K}$, λ_0 sein Exponent in $\mathfrak{d}$, $\lambda_0' = \lambda_0$, wenn $w \neq \xi_h (1 \leqq h \leqq \sigma_0)$, $\lambda_0' = \lambda_0 + \vartheta_h$, wenn $w = \xi_h$, $\mathfrak{G}^*(\mathfrak{d})$ wie in Satz 11 eines derjenigen Funktionensysteme, die aus $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ durch die Tilgung einer der in Satz 9 angegebenen Funktionen entstehen. Dann bilden die Funktionen von $\mathfrak{G}^*(\mathfrak{d})$ zusammen mit den Quersummen*

$$H(\tau, w, \lambda_0' + h_i(w) - 1) \quad (1 \leqq i \leqq p_0)$$

eine Basis von $\mathfrak{C}_r^+$.

Um für den nach (6) vorgegebenen Divisor $\mathfrak{d}$ ein genaues Multiplum $F(\tau)$ von $\mathfrak{d}^{-1}$ zu bestimmen, welches die dem obigen Ansatz entsprechenden Drehreste besitzt, ziehen wir die automorphen Primformen heran. Es seien die reellen Zahlen $\varkappa_h$ mit $0 \leqq \varkappa_h < 1$ $(1 \leqq h \leqq \sigma_0)$ und die rationalen Zahlen $\varrho_k = \frac{a_k}{l_k}$ mit ganzen a_k und $0 \leqq \varrho_k < 1$ $(1 \leqq k \leqq e_0)$ willkürlich aber fest vorgegeben. Wir erklären $\varkappa_h^+$ durch (7) (9), $\hat{\varkappa}_h$, $\hat{\varrho}_k$ durch (17) und bilden das Potenzprodukt

$$(29) \qquad F(\tau) = Q(\tau, \mathfrak{d}) = \prod_{h=1}^{\sigma_0} Z(\tau, \xi_h)^{\hat{\varkappa}_h - \alpha_h} \prod_{k=1}^{e_0} Z(\tau, \omega_k)^{\hat{\varrho}_k - \beta_k} \prod_{m=1}^{d_0} Z(\tau, \tau_m)^{-\lambda_m}.$$

Es sei speziell $\mathfrak{d}$ ein Polygon, es seien also die α_h, β_k nicht negativ, die τ_m, falls vorhanden, paarweise verschiedene Nichtfixpunkte in $\mathfrak{K}$ und die λ_m positiv. $F(\tau)$ gehört einer Klasse $\{\Gamma, +r_1, u_\mathfrak{d}^{*-1}\}$ mit einem reellen r_1 und einem gewissen Multiplikatorsystem $u_\mathfrak{d}^*$ des Betrages Eins an, das wir uns aus $u_\mathfrak{d}^* \subset [\Gamma, -r]$ $(r = 2 + r_1)$ bestimmt denken können. Man erkennt leicht, daß $u_\mathfrak{d}^*$ in dieser Eigenschaft die Drehreste $\varkappa_h$ bzw. ϱ_k aufweist. Denn nach (17) und (29) hat die Klasse $\{\Gamma, -2 - r_1, u_\mathfrak{d}^*\}$ diejenigen Drehreste $\varkappa_{1h}$, ϱ_{1k}, welche durch

$$\varkappa_{1h} \equiv -\hat{\varkappa}_h \equiv \varkappa_h^+ \equiv \varkappa_h \pmod 1, \quad \varrho_{1k} = 1 - \frac{1}{l_k} - \varrho_k = \varrho_k$$

erklärt sind, was bereits die Behauptung ausdrückt. Wir berechnen ferner für die Klasse $\{\Gamma, -r, u_\mathfrak{d}^*\}$ den Wert $a^+ - 2p_0 + 1$. Mit $n = \operatorname{ord} \mathfrak{d}$ gilt nach (29)

$$-r_1 \varrho_0 = -n + \sum_{h=1}^{\sigma_0} \hat{\varkappa}_h + \sum_{k=1}^{e_0} \hat{\varrho}_k,$$

$$(30) \qquad (r-2)\varrho_0 = r\varrho_0 - (2p_0 - 2) - q_0 = n + \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h^+ + \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k - q_0,$$

$$a^+ - 2p_0 + 1 = n - 1,$$

so daß die Voraussetzungen von Satz 9 für $n \geqq 1$ erfüllt sind. Die letzte Gleichung bedeutet im übrigen so viel wie $\nu_0(-r, u_{\mathfrak{d}}^*, \mathfrak{a}\mathfrak{d}) = p_0$.

Bildet man die Divisoren

$$\mathfrak{d}_0 = (w)^{p_0}, \quad \mathfrak{d} = \prod_{m=1}^{p_0} (w_m)$$

mit paarweise verschiedenen sonst beliebigen Punkten w_m in $\mathfrak{K}$ und einem beliebigen festen w in $\mathfrak{K}$, bildet man ferner, jedesmal unter Verwendung der gleichen $\varkappa_h$, ϱ_k, die oben erklärten Funktionen $Q(\tau, \mathfrak{d}_0)$, $Q(\tau, \mathfrak{d})$, so wird deren Quotient

$$\Theta(\tau, \mathfrak{d}) = \frac{Q(\tau, \mathfrak{d}_0)}{Q(\tau, \mathfrak{d})} = \prod_{m=1}^{p_0} \frac{Z(\tau, w_m)}{Z(\tau, w)} \subset \{\Gamma, 0, \chi\}$$

eine multiplikative Funktion mit dem Divisor $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_0^{-1}$, lauter Multiplikatoren χ des Betrages Eins und lauter verschwindenden Drehresten. Hier kann man durch Wahl der w, w_m erreichen, daß χ mit einem willkürlichen geraden Abelschen Charakter von Γ zusammenfällt[5]). Daraus folgt das für die Tragweite des Satzes 12 wichtige Ergebnis:

Wenn $n = \operatorname{ord}\mathfrak{d} \geqq p_0$ ist, so erhält man durch obigen Ansatz in der Gestalt $u_{\mathfrak{d}}^*$ jedes Multiplikatorsystem $[\Gamma, -r]$, welches den Betrag Eins und die gegebenen Drehreste $\varkappa_h, \varrho_k$ aufweist.

Nach (30) hat man nun

$$r\varrho_0 = n + 2p_0 - 2 + \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h^+ + \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k; \tag{30 a}$$

daher ist $n \geqq p_0$ sicher erfüllt, wenn

$$r\varrho_0 \geqq 3p_0 - 2 + q_0, \quad r \geqq 3 + \frac{2 - q_0}{2p_0 - 2 + q_0},$$

und es besteht demgemäß der folgende

Satz 12a. *Die Voraussetzungen und die Behauptungen von Satz 12 gelten für jede Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$, für die*

$$r\varrho_0 \geqq 3p_0 - 2 + \sum_{h=1}^{\sigma_0} \varkappa_h^+ + \sum_{k=1}^{e_0} \varrho_k$$

zutrifft; die Abschätzung für r ist immer dann erfüllt, wenn

$$r \geqq 3 + \frac{2 - q_0}{2\varrho_0}.$$

Die hier auftretende Schranke $r^0 = 3 + \frac{2 - q_0}{2p_0 - 2 + q_0}$ hat folgende Werte:

$$p_0 = 1: \quad r^0 = 2 + \frac{2}{q_0} \leqq 6,$$

$$p_0 \geqq 2: \quad r^0 = 2 + \frac{2p_0}{2\varrho_0} \leqq 2 + \frac{p_0}{p_0 - 1} = 3 + \frac{1}{p_0 - 1} \leqq 4.$$

[5]) H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner 1913, § 17.

Ferner gilt:

Für alle Γ von erster Art mit $\sigma_0 \geqq 2$ ist $r^0 \leqq 3$.

Aus dem soeben dargestellten Zusammenhang läßt sich durch Spezialisierung ein etwas übersichtlicheres Resultat gewinnen:

Satz 13. *Es seien die Zahlen $\varkappa_h$, ϱ_k unter den Bedingungen*

$$0 \leqq \varkappa_h < 1,\ 0 \leqq \varrho_k < 1,\ l_k \varrho_k \text{ ganz } (1 \leqq h \leqq \sigma_0,\ 1 \leqq k \leqq e_0),$$

es sei der Punkt w in $\mathfrak{K}$ und die natürliche Zahl n willkürlich vorgegeben. Es werde r durch (30 a) erklärt, es sei v ein Multiplikatorsystem des Betrages Eins, das als Multiplikatorsystem $[\Gamma, -r]$ die Drehreste $\varkappa_h$, ϱ_k aufweist. Dann gilt für die Klasse $\{\Gamma, -r, v\}$ zunächst

$$a^+ - 2p_0 + 1 = \mu - p_0 = n - 1 \geqq 0.$$

Man betrachte die zu einem festen Punkte $w (= \xi_h$ oder $= \omega_k$ oder $=$ einem Nichtfixpunkt $z)$ in $\mathfrak{K}$ mit den Daten $\{\Gamma, -r, v\}$ nach (15) gebildeten Quersummen $H(\tau, w, \nu)$ $(w \neq \xi_h)$ bzw. $H(\tau, w, \nu + \vartheta_h)$ $(w = \xi_h)$ und nenne $\mathfrak{Q}$ irgend ein System dieser Funktionen, das in jedem Falle durch Angabe der verwendeten $\nu \geqq 0$ zu bestimmen ist. Dann gilt mit der aus (29) zu entnehmenden Bedeutung des Multiplikatorsystems

$$u_{w,n} = u_{\mathfrak{g}}^* \subset [\Gamma, -r] \qquad (\mathfrak{g} = (w)^n):$$

a) *Für $v = u_{w,n}$ besteht das System $\mathfrak{Q}$ mit $0 \leqq \nu \leqq \mu - p_0 - 1$ aus lauter linear unabhängigen Funktionen; dagegen sind die Funktionen des Systems $\mathfrak{Q}$ mit $0 \leqq \nu \leqq \mu - p_0$ linear abhängig.*

b) *Für $v \neq u_{w,n}$ besteht das System $\mathfrak{Q}$ mit $0 \leqq \nu \leqq \mu - p_0$ aus lauter linear unabhängigen Funktionen.*

c) *Für $v = u_{w,n}$ stellt das System $\mathfrak{Q}$ mit*

$$0 \leqq \nu \leqq \mu - p_0 - 1 \quad \text{und} \quad \nu = \mu - p_0 + h_i(w)\ (1 \leqq i \leqq p_0)$$

eine Basis von $\mathfrak{G}_r^+$ dar.

Die hier auftretenden Lückenordnungen $h_i(w)$ sind nur für $p_0 = 1$ und für die $p_0 \geqq 2$ in den hyperelliptischen Fällen genauer bekannt. Es gilt $h_1 = 1$ für $p_0 = 1$ und alle w, ferner in den hyperelliptischen Fällen

$$(31) \quad \begin{array}{l} h_i(w) = i, \text{ wenn } w \text{ kein Verzweigungspunkt ist,} \\ h_i(w) = 2i - 1, \text{ wenn } w \text{ ein Verzweigungspunkt ist.} \end{array} \qquad (1 \leqq i \leqq p_0)$$

Mit den Kriterien des Abschnitts 4 ist das eigentliche Ziel der Untersuchungen, die Zurückführung der Daten, von denen eine Basis der Schar $\mathfrak{G}_r^+$ abhängt, auf die Weierstrassschen Lückenzahlen, also auf ein einheitlich definiertes System von Bestimmungsstücken, erreicht. Eine weitere Reduktion des Problems ist offenbar nicht zu erwarten. Im Bereiche der absolut konvergenten Quersummen H, d. h. für $r > 2$ bleibt die Frage der Basisbestimmung lediglich in den Klassen $\{\Gamma, -r, v\}$

noch offen, auf die Satz 12 nicht angewendet werden kann; dies sind nach Satz 12a ausschließlich Klassen mit

$$2 < r < 3 + \frac{2 - q_0}{2p_0 - 2 + q_0}.$$

Aber auch in den Klassen, deren r den Ungleichungen von Satz 12a genügen, liegen zweifellos komplizierte Verhältnisse vor, wenn man sich auf die Betrachtung von Quersummen H beschränkt, die mit Hilfe eines einzigen Parameterpunktes w gebildet sind.

Im Falle $p_0 = 1$ ergibt sich eine volle Übersicht über die ganzzahligen Parameterwerte $\nu \geqq 0$, für welche die mit einem festen w gebildeten $H(\tau, w, \nu)$ $(w \neq \xi_h$ für $1 \leqq h \leqq \sigma_0)$ bzw. $H(\tau, w, \nu + \vartheta_h)$ $(w = \xi_h)$ eine Basis von $\mathfrak{G}_r^+$ darstellen, gemäß der folgenden Disjunktion: Ist (in der Terminologie des Satzes 13) $r \neq u_{w,n}$, so gewinnt man eine Basis von $\mathfrak{G}_r^+$ durch die Wahl der ersten μ Werte $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1$. Ist dagegen $r = u_{w,n}$, so überspringe man, um eine Basis von $\mathfrak{G}_r^+$ zu bestimmen, den letzten dieser Werte, $\mu - 1$, und ersetze ihn durch den nächstgrößeren, also durch $\nu = \mu$. Die Einfachheit dieser Vorschrift muß allerdings, wie bereits einleitend hervorgehoben wurde, ziemlich teuer erkauft werden. Denn es hat sich, auch bei ganz konkreten Gruppen Γ und selbst im Falle $p_0 = 1$ als recht schwierig erwiesen, die Multiplikatorsysteme $u_{w,n}$ der Primformpotenzen $Q(\tau, \mathfrak{g})$ aus (29) so weit zu bestimmen, daß die obige Disjunktion praktisch realisiert werden kann. Trotzdem gelangt man in günstig gelagerten konkreten Sonderfällen, auch für Gruppen Γ mit $p_0 > 1$, durch Anwendung des Satzes 12 zu einer Fülle von vollständigen expliziten Basisbestimmungen, wie nun an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

5. Im folgenden bezeichne wie in[1]) $\Gamma(N)$ für natürliches N die Hauptkongruenzgruppe der Stufe N, d. h. die Gruppe der unimodularen ganzen $L \equiv I \pmod N$. — Auf die Erörterung des naheliegenden Beispiels $\Gamma = \Gamma(6)$ kann verzichtet werden, da der Fall $p_0 = 1$ allgemein erledigt ist. Wir betrachten die Klassen $\{\Gamma(N), -r, v\}$ mit $N \equiv 0 \pmod 6$, $r > 2$ und $v =$ Multiplikatorsystem $[\Gamma(1), -r]$[5a]) der Modulform

$$\Delta(\tau)^{\frac{r}{12}} = e^{\pi i \frac{r}{6} \tau} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m \tau})^{2r}.$$

Bekanntlich ist $\sqrt[6]{\Delta(\tau)}$ das bis auf einen konstanten Faktor einzige Differential erster Gattung der Gruppe $\Gamma(6)$. Wir schreiben zur Abkürzung $s = \frac{rN}{12}$ und setzen

$$(32) \quad \delta(x) = \left\{ \begin{matrix} 1, \text{ wenn } x \text{ ganz} \\ 0 \text{ sonst} \end{matrix} \right\}, \quad [x] = \text{größte ganze Zahl} \leqq x \ (x \text{ reell}).$$

5a) Vgl. etwa H. Rademacher, Bestimmung einer gewissen Einheitswurzel in der Theorie der Modulfunktionen, Journ. Lond. Math. Soc. 7, 1 (1932) und dort zitierte Literatur; in (20) ist für negatives h im Nenner des Restsymbols die hier durch (35) gegebene Modifikation des Restsymbols einzutragen.

Die Drehreste von $\{\Gamma(N), -r, v\}$ in den Spitzen von $\Gamma(N)$ sind alle einander gleich und zwar $= \varkappa = s - [s]$. Daher wird für diese Klasse

$$a^+ - 2p_0 + 1 = (r-2)\frac{\mu_0}{12} + \sigma_0(1-\varkappa^+) - 1 \geqq 0$$

$$\left(\varrho_0 = \frac{\mu_0}{12}, \quad \mu_0 = \text{Index}\,[\bar{\Gamma}(1) : \bar{\Gamma}(N)]\right). \tag{33}$$

Die Sätze 9, 10, 11, 12 lassen sich auf $\{\Gamma(N), -r, v\}$ deshalb anwenden, weil $\Delta(\tau)^{-\frac{r-2}{12}}$ der Klasse $\{\Gamma(N), r-2, v^{-1}\}$ angehört. Für die (von den Bruchbestandteilen befreite) gemeinsame Ordnung $-b = -b_{N,r}$ dieser Funktion in den Spitzen ergibt sich

$$b = b_{N,r} = (r-2)\frac{N}{12} + 1 - \varkappa^+ = \left[\frac{rN}{12}\right] - \frac{N}{6} - \delta\left(\frac{rN}{12}\right) + 1,$$

und es ist nach (33) in den Bezeichnungen von Satz 9

$$\mathfrak{d} = \prod_{h=1}^{\sigma_0} (\xi_h)^b, \quad \sigma_0 b = \text{ord}\,\mathfrak{d} = \mu - p_0 + 1.$$

Damit sind — bis auf die Lückenzahlen $h_i(w)$ — die sämtlichen Daten für die Anwendung der genannten Sätze zusammengestellt.

Es soll jetzt eine Klasse numerischer Beispiele mit $p_0 = 3$ vollständig diskutiert werden[6]). Die Thetareihen[7])

$$\vartheta_{00}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{2}}, \quad \vartheta_{01}(\tau) = \vartheta_{00}(\tau+2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{2}} \tag{34}$$

sind ganze Modulformen $\{\Gamma(4), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\}$ mit[8])

$$v_\vartheta(L) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)_* = \left(\frac{\gamma}{|\delta|}\right)(-1)^{\frac{\text{sgn}\,\gamma - 1}{2}\,\frac{\text{sgn}\,\delta - 1}{2}}$$

$$\left(L = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod 4, \quad \gamma \neq 0; \left(\frac{0}{1}\right)_* = 1\right). \tag{35}$$

L sei wie alle anderen im folgenden auftretenden zweireihigen Matrizen ganzzahlig und unimodular. Da e_0 und die Drehreste $\varkappa_h$ der Klasse $\{\Gamma(4), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\}$ $(1 \leqq h \leqq \sigma_0 = 6)$ sämtlich verschwinden[7]), da ferner $\varrho_0 = \frac{\mu_0}{12}$ (vgl. (33)) für $\Gamma(4)$ den Wert 2 hat und da schließlich $\vartheta_{00}(\tau)$

---

[6]) Bezüglich der im Folgenden auftretenden Gruppe $\bar{\Gamma}(4)$ und ihrer Thetareihen vgl. H. Petersson, Über die Berechnung der Skalarprodukte ganzer Modulformen, Comm. Math. Helv. Bd. 22 (1949).

[7]) Vgl. [6]) und: H. Petersson, Über die Entwicklungskoeffizienten der ganzen Modulformen und ihre Bedeutung für die Zahlentheorie, Abhandl. a. d. Math. Seminar Hamburg 8 (1930); Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppeu IV, Math. Annalen **115** (1938).

[8]) a. a. O.[7]) Abhandl. a. d. Math. Seminar Hamburg 8 (1930) und dort zitierte Literatur.

eine in $\mathfrak{H}$ konvergente Produktentwicklung gestattet, hat sowohl $\vartheta_{00}(\tau)$ als auch $\vartheta_{01}(\tau)$ die Eigenschaften einer Primform zu je einer Spitze eines Fundamentalbereichs der $\Gamma(4)$.

Wir betrachten die Untergruppe $\tilde{\Gamma}(4)$ von $\Gamma(4)$, deren Matrizen L den Bedingungen

$$(36)\quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ ganz, } |L| = \alpha\delta - \beta\gamma = 1,\ \alpha \equiv \delta \equiv 1\,(4),\ \beta \equiv \gamma \equiv 0\,(8)$$

genügen. $\tilde{\Gamma}(4)$ ist ein Normalteiler der vollen Modulgruppe mit den Daten

$$(37)\qquad \Gamma = \tilde{\Gamma}(4):\ \sigma_0 = 12,\ e_0 = 0,\ \varrho_0 = \frac{\mu_0}{12} = 8,\ p_0 = 3.$$

Beim Übergang von $\Gamma(4)$ zu $\tilde{\Gamma}(4)$ zerfällt jede Spitze eines Fundamentalbereiches von $\Gamma(4)$ in zwei nach $\tilde{\Gamma}(4)$ inäquivalente Spitzen, welche gemäß (36) beide die Breite 8 erhalten. Daraus ergibt sich das Verhalten der Funktionen (34) in ihrer Eigenschaft als automorphe Formen der Gruppe $\tilde{\Gamma}(4)$: Jede von ihnen hat in genau zwei Spitzen eines Fundamentalbereichs $\tilde{\mathfrak{R}}_4$ von $\tilde{\Gamma}(4)$ je eine Nullstelle zweiter Ordnung und ist in allen anderen Punkten von $\tilde{\mathfrak{R}}_4$ regulär und von Null verschieden. Die in diesem Sinne den Modulformen ϑ_{00} bzw. ϑ_{01} zugeordneten Spitzen von $\tilde{\mathfrak{R}}_4$ mögen mit ζ_1, ζ_2 bzw. ζ_3, ζ_4 bezeichnet werden.

Es seien s und t reell. Mit einem gewissen Multiplikatorsystem $v_\vartheta^{(s,t)}$ des Betrages Eins aus $\left[\tilde{\Gamma}(4), -\frac{s+t}{2}\right]$ gilt

$$(38)\qquad \vartheta^{(s,t)}(\tau) \equiv \vartheta_{00}^{s}(\tau)\,\vartheta_{01}^{t}(\tau) \subset \left\{\tilde{\Gamma}(4), -\frac{s+t}{2}, v_\vartheta^{(s,t)}\right\}.$$

Die Drehreste $\varkappa_h$ dieser Klasse haben die Werte

$$(39)\quad \varkappa_1 = \varkappa_2 = 2s - [2s],\ \varkappa_3 = \varkappa_4 = 2t - [2t],\ \varkappa_5 = \varkappa_6 = \cdots = \varkappa_{12} = 0.$$

Wegen $\vartheta^{(s,t)}(\tau) \subset \{\tilde{\Gamma}(4), -2, 1\}$ für ganze s, t mit $s+t = 4$ ist

$$v_\vartheta^{(2-s,\,2-t)}\, v_\vartheta^{(s,t)} = 1,\ \vartheta^{(2-s,\,2-t)}(\tau) \subset \left\{\tilde{\Gamma}(4),\ \frac{s+t}{2} - 2,\ (v_\vartheta^{(s,t)})^{-1}\right\}.$$

Es sei insbesondere $s \geqq 0$, $t \geqq 0$, $s+t > 0$. Dann stellt $\vartheta^{(s,t)}(\tau)$ eine ganze Modulform dar, und man findet nach (37), (39) für die Klasse (38) von $\vartheta^{(s,t)}$:

$$(40)\qquad a^+ - 2p_0 + 1 = 2\left([2s] + [2t] - \delta(2s) - \delta(2t)\right) - 13.$$

Daher ist $a^+ - 2p_0 + 1$ ungerade und fällt für $[2s] - \delta(2s) + [2t] - \delta(2t) \geqq 7$ positiv aus. Die letzte Ungleichung werde im folgenden als erfüllt vorausgesetzt; sie gilt z. B. stets für $s > \frac{3}{2}$, $t > 2$ und auch für $s > 2$, $t > \frac{3}{2}$.

Die zahlentheoretische Funktion $\beta_s = [2s] - \delta(2s) - 3$ hat offenbar die Werte

$$\beta_s = k \text{ für } \frac{3+k}{2} < s \leqq 2 + \frac{k}{2},\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{41}$$

und nun erweist sich $\vartheta^{(2-s,\,2-t)}(\tau)$ als genaues Multiplum von $\mathfrak{d}^{-1}$ in der Klasse $\left\{\tilde{\Gamma}(4),\ \frac{s+t}{2} - 2,\ (v_\vartheta^{(s,t)})^{-1}\right\}$, wo

$$\mathfrak{d} = (\xi_1)^{\beta_s}\,(\xi_2)^{\beta_s}\,(\xi_s)^{\beta t}\,(\xi_t)^{\beta t};$$

$\mathfrak{d}$ ist nach (41) dann und nur dann ein Polygon, wenn $s > \frac{3}{2}$ und zugleich $t > \frac{3}{2}$.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß $\tilde{\Gamma}(4)$ (d. h. das der Gruppe $\tilde{\Gamma}(4)$ entsprechende algebraische Gebilde) nicht hyperelliptisch ist. Wir bebetrachten allgemeiner das System $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}(\mathfrak{N})$ der Weierstraß-Punkte im kanonischen Fundamentalbereich $\mathfrak{K}_\mathfrak{N}$ eines echten Normalteilers $\Gamma = \mathfrak{N}$ der Modulgruppe $\Gamma(1)$ vom endlichen Index μ_0 in $\Gamma(1)$. Offenbar zerfällt $\mathfrak{W}$ in vollständige Teilsysteme von untereinander nach $\Gamma(1)$ äquivalenten Punkten in $\mathfrak{K}_\mathfrak{N}$. Je zwei Punkte w, w' des gleichen Teilsystems besitzen die gleichen Lückenzahlen, d. h. es gilt $h_i(w) = h_i(w')$ für $w \subset \mathfrak{W}(\mathfrak{N})$, $w \sim w'\,(\Gamma(1))$, $w, w' \subset \mathfrak{K}_\mathfrak{N}$, $1 \leqq i \leqq p_0$. Daher besteht $\mathfrak{W}(\mathfrak{N})$ aus mindestens μ_0 Punkten, wenn $\mathfrak{W}$ einen Nichtfixpunkt enthält, und aus mindestens σ_0 Punkten, wenn $\mathfrak{W}$ eine Spitze enthält. Andererseits müßte $\mathfrak{W}(\tilde{\Gamma}(4))$ aus acht Punkten bestehen, wenn $\tilde{\Gamma}(4)$ hyperelliptisch wäre, und dies widerspricht nach (37) dem soeben dargestellten Sachverhalt. Auf die gleiche Art beweist man, daß $\Gamma(7)$ und $\Gamma(8)$ nicht hyperelliptisch sind. Für $N \geqq 9$ ergibt sich die analoge Aussage über $\Gamma(N)$ aus einer Teilbarkeitsrelation und einer einfachen numerischen Abschätzung [9]).

Für einen beliebigen Punkt w im kanonischen Fundamentalbereich $\mathfrak{K}$ einer Grenzkreisgruppe Γ von erster Art nennt man

$$\lambda(w) = \sum_{i=1}^{p_0} (h_i(w) - i) \quad (w \subset \mathfrak{K})$$

die Lückenordnung von w. Die Summe aller Lückenordnungen $\lambda(w)$, erstreckt über alle Punkte w von $\mathfrak{K}$, hat den Wert $(p_0 - 1)\,p_0(p_0 + 1)$. Da dieser Wert bei den Gruppen $\Gamma = \Gamma(4), \Gamma(7), \Gamma(8)$ erheblich kleiner ausfällt als μ_0, so stimmt w für diese Gruppen mit dem System der Spitzen überein, und man erhält für jede Spitze ξ der betreffenden Gruppe Γ:

$$\begin{gathered}\lambda(\xi) = 2\ (\Gamma = \tilde{\Gamma}(4)),\quad \lambda(\xi) = 1\ (\Gamma = \Gamma(7)),\quad \lambda(\xi) = 5\ (\Gamma = \Gamma(8)),\\ h_1(\xi) = 1,\ h_2(\xi) = 2,\ h_3(\xi) = 5\ (\Gamma = \tilde{\Gamma}(4));\\ h_1(\xi) = 1,\ h_2(\xi) = 2,\ h_3(\xi) = 4\ (\Gamma = \Gamma(7)).\end{gathered} \tag{42}$$

[9]) Vgl. H. Petersson, Zwei Bemerkungen über die Weierstraßpunkte der Kongruenzgruppen, erscheint im Archiv d. Math.

Mit diesen Daten sind für die Klassen $\left\{\tilde{\Gamma}(4),\ -\frac{s+t}{2},\ v_\vartheta^{(s,t)}\right\}$ alle Unterlagen zu einer Realisierung des Satzes 12 gewonnen. Es sei entweder $s>\frac{3}{2}$, $t>2$ oder $s>2$, $t>\frac{3}{2}$ (s, t reell). Man bilde zunächst das System $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$:

$$G_{-\frac{s+t}{2}}(\tau, v_\vartheta^{(s,t)}, A_h, \tilde{\Gamma}(4), \nu_h+\delta(2s)) \tag{43}$$

$$(0\leqq\nu_h\leqq\beta_s-1;\ h=1,2\ \text{—}\ \text{wofern}\ s>2),$$

$$G_{-\frac{s+t}{2}}(\tau, v_\vartheta^{(s,t)}, A_h, \tilde{\Gamma}(4), \nu_h+\delta(2t)) \tag{44}$$

$$(0\leqq\nu_h\leqq\beta_t-1;\ h=3,4\ \text{—}\ \text{wofern}\ t>2)$$

und schließe nun entweder eine der beiden Funktionen (43) mit $\nu_1=\nu_2=\beta_s-1$ oder eine der beiden Funktionen (44) mit $\nu_3=\nu_4=\beta_t-1$ von $\mathfrak{G}(\mathfrak{d})$ aus, — das erstere kann für $s>2$, das letztere für $t>2$ geschehen. — Dem dadurch entstehenden System $\mathfrak{G}^*(\mathfrak{d})$ (das also die sämtlichen Funktionen (43), (44) mit genau einer Ausnahme enthält) füge man die drei Funktionen eines der folgenden zwölf Systeme hinzu:

$$G_{-\frac{s+t}{2}}(\tau, v_\vartheta^{(s,t)}, A_h, \tilde{\Gamma}(4), m) \tag{45}$$

(h ein fester Wert mit $5\leqq h\leqq 12$; $m=1,2,5$)

$$G_{-\frac{s+t}{2}}(\tau, v_\vartheta^{(s,t)}, A_h, \tilde{\Gamma}(4), \beta_s+\delta(2s)+m) \tag{46}$$

($h=1$ oder 2; $m=0,1,4$)

$$G_{-\frac{s+t}{2}}(\tau, v_\vartheta^{(s,t)}, A_h, \tilde{\Gamma}(4), \beta_t+\delta(2t)+m) \tag{47}$$

($h=3$ oder 4; $m=0,1,4$).

Dann entsteht eine Basis von $\mathfrak{G}^+(\tilde{\Gamma}(4), -\frac{s+t}{2}, v_\vartheta^{(s,t)})$. Anstelle eines der zwölf Tripel (45) (46) (47) kann man sich mit dem gleichen Erfolg auch jedes Tripels

$$\Phi_{-\frac{s+t}{2}}(\tau, v_\vartheta^{(s,t)}, z, \tilde{\Gamma}(4), m) \quad (z\subset\mathfrak{H},\ m=0,1,2) \tag{48}$$

bedienen. — Die hier angegebene Basiskonstruktion besteht insbesondere für ganze und halbzahlige Dimensionen $-\frac{s+t}{2}$ und für diejenigen explizit bestimmten Multiplikatorsysteme $v_\vartheta^{(s,t)}=v_\vartheta^{s+t}$, die man aus diesem Ansatz für ganze s und t mit $s\geqq 2$, $t\geqq 2$, $s+t\geqq 5$ erhält.

Zu ähnlichen Ergebnissen gelangt man für $\Gamma=\Gamma(7)$ und $\Gamma=\Gamma(8)$. Im Falle $\Gamma=\Gamma(7)$ kann man, um die Voraussetzungen des Satzes 12 in der analogen Weise zu realisieren, von der Funktion $F(\tau)=\Delta(\tau)^{-\frac{r-2}{12}}$

ausgehen, die eine Modulform von der Dimension $r-2$ darstellt. Im Falle $\Gamma = \Gamma(8)$ kann man ebenfalls von der Form $F(\tau) = \Delta(\tau)^{-\frac{r-2}{12}}$ oder von der Form $F(\tau) = \vartheta^{(2-s,\,2-t)}(\tau)$ ausgehen. Bei der Wahl $F(\tau) = \Delta(\tau)^{-\frac{r-2}{12}}$ ist jedoch zu beachten, daß das in der allgemeinen Theorie mit v bezeichnete Multiplikatorsystem $[\Gamma, -r]$ nicht mit dem Multiplikatorsystem von $\Delta(\tau)^{\frac{r}{12}}$ übereinstimmt. Unabhängig davon spielt bei allen diesen Ansätzen $F(\tau)$ die Rolle der automorphen Form (29). Auf die ausführliche Formulierung der Ergebnisse kann verzichtet werden, da ihre genaue Struktur aus Satz 12 und dem Beispiel $\Gamma = \tilde{\Gamma}(4)$ zu ersehen ist.

Im Falle $\Gamma = \Gamma(8)$ müssen jedoch zur Durchführung einer dieser Konstruktionen die Weierstrassschen Lücken zahlen h_i (w) $(1 \leqq i \leqq p_0)$ bestimmt werden, wobei es genügt, für w irgend eine Spitze der $\Gamma(8)$ einzusetzen. Diese Bestimmung läßt sich mit Hilfe des Riemann-Rochschen Satzes auf eine Eigenschaft der einfachen Thetareihen der $\Gamma(8)$ zurückführen. Sie gelingt wesentlich deshalb, weil die einfachen Thetareihen der Stufe 8 von den Dimensionen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{3}{2}$ vollständig bekannt sind.

Zur Stufe 8 gehören nach [6]) neben den Funktionen (34) die Thetareihen

$$\vartheta(\tau, h) = \sum_{m \equiv h\ (4)} e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{4}} \subset \left\{\Gamma(8), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\right\} \qquad (h = 0, 1, 2) \tag{49}$$

Sie stellen wie die Funktionen (34) ganze Modulformen dar und sind mit ihnen zusammen linear unabhängig. Ferner gehört zur $\Gamma(8)$ eine einfache Thetareihe der Dimension $-\frac{3}{2}$:

$$\vartheta_1(\tau, 1) = \sqrt[8]{\Delta(\tau)} = \sum_{m \equiv 1\ (4)} m\, e^{\pi i m^2 \frac{\tau}{4}} \subset \left\{\Gamma(8), -\frac{3}{2}, v_\vartheta\right\}; \tag{50}$$

sie ist offenbar eine ganze Spitzenform.

Für die elementaren Konstanten der Klasse $\{\Gamma, -r, v\} = \{\Gamma(8), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\}$ finden sich die Werte

$$\sigma_0 = 24,\ e_0 = 0,\ \varrho_0 = \frac{\mu_0}{12} = 16,\ p_0 = 5;\quad \varkappa_h = 0\ (1 \leqq h \leqq 24). \tag{51}$$

Hieraus folgt nach (8) und (50)

$$\nu_0(-\tfrac{1}{2}, v_\vartheta, \langle 1\rangle) = 8 - 5 + 1 + \nu_0(-\tfrac{3}{2}, v_\vartheta, \mathfrak{a}) \geqq 5; \tag{52}$$

in dieser Ungleichung kann rechts das Gleichheitszeichen geschrieben werden, weil $\vartheta_1(\tau, 1)$ wegen $\operatorname{ord} \mathfrak{a} = \frac{3}{2}\varrho_0$ ein genaues Multiplum von $\mathfrak{a}$ ist. Daher bilden die fünf Funktionen (34) und (49) eine Basis von $\mathfrak{C}_{\frac{1}{2}}$.

Für eine Spitze ζ von $\Gamma(8)$ und ganzes $k \geqq 0$ setzen wir

$$t_k = \nu_0(-\tfrac{1}{2}, v_\vartheta, (\zeta)^k) - \nu_0(-\tfrac{1}{2}, v_\vartheta, (\zeta)^{k+1}) \quad (k \geqq 0)$$
$$t'_k = \nu_0(-\tfrac{3}{2}, v_\vartheta, \mathfrak{a}(\zeta)^{-k}) - \nu_0(-\tfrac{3}{2}, v_\vartheta, \mathfrak{a}(\zeta)^{-k+1}) \quad (k \geqq 1).$$

Wie beim Beweise von Satz 12 gilt

$$0 \leqq t_k \leqq 1, \quad 0 \leqq t_k' \leqq 1, \quad t_{k-1} + t_k' = 1 \ (k \geqq 1), \quad \sum_{k=0}^{8} t_k = 5.$$

Dividiert man eine Form $\{\Gamma(8), -\frac{5}{2}, v_\vartheta\}$, die ein Multiplum von $\mathfrak{a}(\xi)^{-k}$, nicht aber von $\mathfrak{a}(\xi)^{k+1}$ ist, durch $\vartheta_1(\tau, 1)$, so erhält man eine in $\mathfrak{R}$ außerhalb von ξ reguläre automorphe Funktion $\{\Gamma(8), 0, 1\}$, die in ξ die Ordnung $-k$ aufweist und umgekehrt. Daher sind die Weierstrass-schen Lückenzahlen $h_i(\xi)$ $(1 \leqq i \leqq 5)$ durch $h_i(\xi) = k$, $t_{k-1} = 1$ erklärt.

Wir betrachten insbesondere die Spitze $\xi = \xi_1 = \infty$ und ordnen einer ganzen Form $f(\tau) \subset \{\Gamma(8), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\}$ den Vektor

$$\mathfrak{c}(f) = \{b_0(I, f), b_1(I, f), \ldots, b_8(I, f)\}, \quad f \subset \mathfrak{C}_{\frac{1}{2}} \tag{53}$$

zu. Wegen $\frac{1}{2}\varrho_0 = 8$ ist $f(\tau)$ durch $\mathfrak{c}(f)$ eindeutig bestimmt. Der Schar $\mathfrak{C}_{\frac{1}{2}}$ der ganzen Formen $\{\Gamma(8), -\frac{1}{2}, v_\vartheta\}$ entspricht vermöge (53) ein lineares Vektorgebilde $\mathfrak{B}$ vom Range 5 im neundimensionalen komplexen Vektorraum. Indem wir die Reihenfolge der Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_8$ dieses Raumes durch

$$\mathfrak{c}(f) = \sum_{\nu=0}^{8} b_\nu(I, f)\, \mathfrak{e}_\nu$$

bestimmen, erhalten wir für die fünf Modulformen

$$f(\tau) = \vartheta(\tau, 0), \ \vartheta(\tau, 1), \ \vartheta(\tau, 2), \ \vartheta_{00}(\tau), \ \vartheta_{01}(\tau):$$
$$\mathfrak{c}(f) = \mathfrak{e}_0, \ \mathfrak{e}_1, \ 2\mathfrak{e}_4, \ \mathfrak{e}_0 + 2\mathfrak{e}_2 + 2\mathfrak{e}_8, \ \mathfrak{e}_0 - 2\mathfrak{e}_2 + 2\mathfrak{e}_8.$$

Mithin bilden die Vektoren $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_4, \mathfrak{e}_8$ eine Basis von $\mathfrak{B}$, und es ergibt sich in Ergänzung zu und in Übereinstimmung mit (42):

$$h_1(\xi) = 1, \ h_2(\xi) = 2, \ h_3(\xi) = 3, \ h_4(\xi) = 5, \ h_5(\xi) = 9. \tag{54}$$

(Eingegangen am 18. Februar 1948.)

Eine Bemerkung zum Konvergenzkriterium von Weierstraß.

Von

H. Jehle in Weinheim (Bergstr.)

Das Konvergenzkriterium von WEIERSTRASS[1]) lautet: Ist $\sum a_n$ eine Reihe mit beliebigen komplexen Gliedern, und kann für alle n von einer gewissen Stelle an der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ auf die Form

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a}{n} + c_n \tag{1}$$

gebracht werden[2]) mit konstantem a und absolut konvergenter Reihe $\sum c_n$, so ist $\sum a_n$ dann und nur dann konvergent, wenn $\Re(a) < -1$ ist. Die Konvergenz ist dann eine absolute.

Daß die Bedingung hinreichend ist, ist leicht zu beweisen[3]), nicht so leicht, daß sie auch notwendig ist. Hierfür gaben A. PRINGSHEIM[4]) und I. A. GMEINER[5]) Beweise, die gegenüber dem WEIERSTRASS'schen als einfacher anzusehen sind. Der folgende dürfte wesentlich kürzer und durchsichtiger sein, als die bisher genannten. Wie bei diesen wird sich ergeben, daß $\sum a_n$ im Falle $\Re(a) = -1$, $a \neq -1$ noch beschränkte Teilsummen hat, für $a = -1$ und $\Re(a) > -1$ dagegen nicht mehr.

Hilfssatz 1. Für die Glieder der Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ mögen von einer gewissen Stelle an die Beziehungen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}(1 + c_n) \tag{2}$$

gelten, mit Zahlen c_n, für die $\sum c_n$ absolut konvergiert[6]). Wenn dann

[1]) K. WEIERSTRASS, Werke I S. 185. Vergl. auch K. KNOPP, Unendliche Reihen, 4. Auflage (1947) S. 412.

[2]) WEIERSTRASS fordert hier, daß $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sich in eine konvergente Reihe der Form $1 + \frac{a}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots$ entwickeln lasse. Spätere Autoren fordern eine Darstellung der Form $1 + \frac{a}{n} + \frac{\alpha_n}{n^\lambda}$ mit $\lambda > 1$ und beschränkten α_n. Das allein Wesentliche aber ist die absolute Konvergenz von $\sum \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 - \frac{a}{n} \right)$.

[3]) Vgl. KNOPP a. a. O.

[4]) A. PRINGSHEIM Archiv Math. u. Phys. (3) **4**. S. 1—19, spez. S. 13—17 (1902).

[5]) I. A. GMEINER, Monatsh. Math. u. Phys. **19**, S. 149—163 (1908).

[6]) Mit $c_n, c'_n, \dots$ sollen im Folgenden die Glieder von absolut konvergenten Reihen bezeichnet werden. Sie brauchen nicht an jeder Stelle, an der sie auftreten, dieselben zu sein.

von den Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$

(a) die eine beschränkte Teilsummen hat, so auch die andere;

(b) die eine konvergiert, so auch die andere.

Beweis. Da nach (2) auch $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}(1+c_n')$ ist, so brauchen die beiden Behauptungen nur in der einen Richtung bewiesen zu werden. Aus (2) folgt nun, daß von einer Stelle an $a_n = b_n \cdot p_n$ gesetzt werden darf, wobei die p_n Teilprodukte eines absolut konvergenten Produktes sind. Abelsche Teilsummierung liefert dann, wenn die Teilsummen der Reihen $\sum' a_n$ und $\sum b_n$ mit A_n bzw. B_n bezeichnet werden:

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+k}{}' a_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{n+k}{}' b_\nu p_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{n+k}{}' B_\nu (p_\nu - p_{\nu+1}) - B_n p_{n+1} + B_{n+k} p_{n+k+1}.$$

Dies zeigt, daß aus der Beschränktheit der B_n die der A_n folgt, zeigt aber auch, daß aus der Konvergenz der B_n die der A_n folgt, denn $\sum (p_\nu - p_{\nu+1}) = \sum p_\nu c_{\nu+1}$ ist absolut konvergent.

Hilfssatz 2. Gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a}{n} + c_n \text{ und zugleich } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{a}{n} + c_n',$$

so ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n}(1+c_n'').$$

Denn es ist

$$\frac{1 + \frac{a}{n} + c_n}{1 + \frac{a}{n} + c_n'} = (1+c_n'').$$

Beweis, daß $\sum a_n$ divergiert, falls (1) gilt und $\Re(a) \geqq -1$ ist. Nach den beiden Hilfssätzen braucht die Behauptung nur für eine spezielle Reihe $\sum b_n$ bewiesen zu werden, für die $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{a}{n} + c_n$ gesetzt werden kann. Für $a = -1$ leistet schon die harmonische Reihe das Gewünschte. Denn es ist

$$\frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} + c_n.$$

Für $\Re(a) = -1$, $a \neq -1$ und $\Re(a) > -1$ leistet es die Reihe $\sum b_n$ mit

$$b_n = e^{(1+a)h_{n-1}} - e^{(1+a)h_n} \qquad (n \geqq 1),$$

wobei $h_0 = 0$ und $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \ldots + \frac{1}{n}$ für $n \geqq 1$ gesetzt ist; denn für sie ist

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = e^{\frac{1+a}{n}} \cdot \frac{1 - e^{\frac{1+a}{n+1}}}{1 - e^{\frac{1+a}{n}}} = 1 + \frac{a}{n} + c_n$$

und ferner $B_n = 1 - e^{(1+a)h_n}$, woraus die Behauptungen abzulesen sind.

(Eingegangen am 6. Februar 1948.)

Schlingknoten.

Von

H. Seifert in Heidelberg.

Einleitung.

Wenn sich zu einer topologischen Abbildung des dreidimensionalen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^3$ auf sich selbst eine simpliziale Zerlegung angeben läßt, deren Simplexe affin abgebildet werden, so heißt diese Abbildung *semilinear*. Wir wollen sie kurz eine *s-Abbildung* nennen, wenn sie überdies die Orientierung des Raumes invariant läßt. Die *s*-Abbildungen des $\mathfrak{R}^3$ bilden eine Gruppe (vgl. GRAEUB [2]). Die Knotentheorie ist ein Teil der zu dieser Gruppe gehörigen Geometrie. Sie beschäftigt sich mit den gegen *s*-Abbildungen invarianten Eigenschaften von Knoten, d. h. von doppelpunktfreien geschlossenen Polygonen*).

Die einfachsten Knoten sind solche, die man durch *s*-Abbildung in den Rand eines Dreiecks überführen kann. Man spricht in diesem Falle von einem *Kreis*, oder einer *unverknoteten Kurve*. Ein Kreis läßt sich auch dadurch kennzeichnen, daß er Rand eines singularitätenfreien, aus ebenen Dreiecken aufgebauten Elementarflächenstückes ist (vgl. GRAEUB [2]).

Auch wenn der Knoten kein Kreis ist, kann man ein Elementarflächenstück in ihn einspannen, aber es weist Singularitäten (Selbstdurchdringungen) auf. Z. B. bildet der Projektionskegel, den man durch Projektion des Knotens von einem nicht auf ihm liegenden Punkt aus erhält, ein solches Elementarflächenstück.

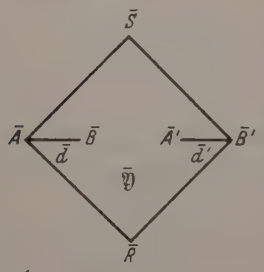

Fig. 1.

Man kann nach den Knoten fragen, in die sich ein Elementarflächenstück $\mathfrak{Y}$ mit möglichst einfacher Selbstdurchdringung einspannen läßt. Diese werden dann in gewissem Sinne nächst den Kreisen die einfachsten Knoten sein.

Um die Art der Selbstdurchdringung von $\mathfrak{Y}$ zu beschreiben, betrachten wir neben $\mathfrak{Y}$ sein singularitätenfreies Urbild $\overline{\mathfrak{Y}}$, das wir als ebenes Quadrat $\overline{A}\,\overline{R}\,\overline{B}'\,\overline{S}$ realisiert denken (Fig. 1) und aus dem $\mathfrak{Y}$ durch eine

*) Zwei Knoten werden hiernach als äquivalent betrachtet, wenn sie durch *s*-Abbildungen ineinander überführbar sind. Diese Äquivalenz-Definition ist gleichwertig mit der sonst gebräuchlichen, wonach zwei Knoten als äquivalent angesehen werden, wenn sie durch eine Reihe von „elementaren Deformationen“ ineinander überführbar sind (vgl. GRAEUB [2]).

simpliziale Abbildung η hervorgehe. Die Selbstdurchdringung von $\mathfrak{Y}$ erfolge längs eines Streckenzuges d, dem im Urbild $\overline{\mathfrak{Y}}$ die beiden gleich langen Strecken $\overline{d} = \overline{A}\,\overline{B}$ und $\overline{d}' = \overline{A}'\,\overline{B}'$ der Diagonale $\overline{A}\,\overline{B}'$ entsprechen mögen. Je zwei Punkte von $\overline{d}$ und $\overline{d}'$, die bei der Translation $\overline{A} \to \overline{A}'$ einander entsprechen, sollen denselben Bildpunkt auf d haben. Ein singularitätenfreies Elementarflächenstück $\mathfrak{Y}$, das eine Selbstdurchdringung der angegebenen Art aufweist, heiße kurz ein *Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung*. Zwei Elementarflächenstücke mit Selbstdurchdringung werden als gleich betrachtet, wenn sie dieselbe Punktmenge des $\mathfrak{R}^3$ ausmachen.

Der Rand eines Elementarflächenstückes mit Selbstdurchdringung, also das η-Bild des Randes $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{B}'\,\overline{S}\,\overline{A}$ des Quadrates $\overline{\mathfrak{Y}}$ heißt ein *Schlingknoten*. Ein Schlingknoten ist mit anderen Worten ein Knoten, in den sich ein Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung „einspannen" läßt.

Von den möglichen gestaltlichen Verhältnissen, die hierbei vorliegen können, gewinnt man eine anschauliche Vorstellung, wenn man das Urbildquadrat $\overline{\mathfrak{Y}}$ in Richtung der Diagonale $\overline{A}\,\overline{B}'$ zu einem langen Bande ausdehnt, dieses in beliebiger Weise verschlingt und verdrillt und dann seine Enden so zusammensteckt, daß sie sich längs einer Strecke

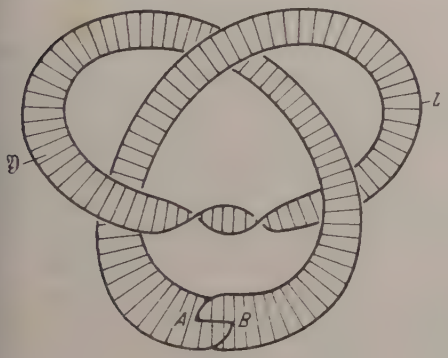

Fig. 2.

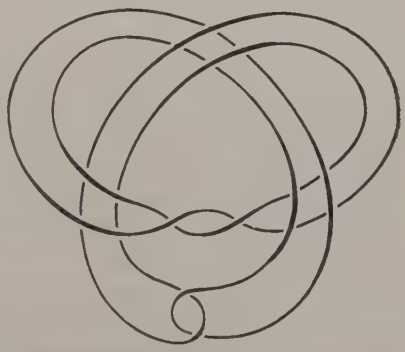

Fig. 3.

$d = AB$ durchdringen. Fig. 2 zeigt ein Beispiel, in Fig. 3 ist der Schlingknoten l noch einmal ohne das eingespannte Flächenstück $\mathfrak{Y}$ gezeichnet.

Mit dem Elementarflächenstück $\mathfrak{Y}$ mit Selbstdurchdringung ist nicht nur der Schlingknoten l als Rand von $\mathfrak{Y}$, sondern noch ein weiterer Knoten k bestimmt. Man erhält ihn, wenn man auf $\mathfrak{Y}$ die Endpunkte A und B der Durchdringungslinie d durch einen doppelpunktfreien und abgesehen von seinen Endpunkten A und B zu d punktfremden Streckenzug v verbindet und diesen durch d zu einem geschlossenen Polygon k ergänzt. Im Urbild $\overline{\mathfrak{Y}}$ erscheint v als ein doppelpunktfreier,

die Punkte $\overline{A}'$ und $\overline{B}$ verbindender Streckenzug $\bar{v}$, der abgesehen von seinen Endpunkten $\overline{A}'$ und $\overline{B}$ die Strecken $\overline{d}$ und $\overline{d}'$ nicht trifft. Da man zwei solche Streckenzüge in dem längs $\overline{d}$ und $\overline{d}'$ aufgeschnittenen Quadrat durch elementare Deformationen ineinander überführen kann, so ist k bis auf äquivalente Knoten vollkommen durch $\mathfrak{Y}$ bestimmt. Wir können k z. B. auffassen als η-Bild der Diagonale $\overline{A}\,\overline{B}'$ und nennen k deshalb den *Diagonalknoten* von $\mathfrak{Y}$.

Ist nicht das Elementarflächenstück $\mathfrak{Y}$ mit Selbstdurchdringung, sondern ein Schlingknoten l vorgelegt, so erhebt sich die Frage, wieviele verschiedene Elementarflächenstücke mit Selbstdurchdringung man in ihn einspannen kann. Es wird sich zeigen, daß es im wesentlichen nur ein solches Elementarflächenstück gibt. Genauer: *sind $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}^*$ zwei in l eingespannte Elementarflächenstücke mit Selbstdurchdringung, so gibt es, abgesehen von einem Ausnahmefall, eine s-Abbildung des $\mathfrak{R}^3$, die $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}$ überführt. Insbesondere ist also der Diagonalknoten k durch den Schlingknoten l bis auf äquivalente festgelegt. Diese letztere Aussage gilt sogar ohne jede Ausnahme.*

Daraus ergibt sich ein neuer Beweis des Satzes von Whitehead [6], wonach ein Schlingknoten i. a. kein Kreis ist.

Geht man vom Diagonalknoten k aus und fragt nach den zugehörigen Elementarflächenstücken mit Selbstdurchdringung, so gibt es deren immer unendlich viele wesentlich verschiedene. Man hat nur ein schmales Band in der durch k angegebenen Weise zu verknoten und seine Enden wie in Fig. 2 zusammenzustecken. Dabei kann man das Band noch eine beliebige Anzahl von Malen verdrillen. Bei geeigneter Verdrillung erhält man als Rand von $\mathfrak{Y}$ einen Schlingknoten l, *dessen Homologieinvarianten* (d. h. Homologiegruppen und Verschlingungsinvarianten der zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeiten des Knotenaußenraumes) *sich nicht von denen der Kreislinie unterscheiden.* Es ist daher von Interesse, daß man in den Diagonalknoten über die Homologieinvarianten hinausgehende Invarianten der Schlingknoten besitzt. Die Schlingknoten wurden erstmalig von Whitehead [6] untersucht (vgl. auch H. Seifert [5]).

§ 1.

Der Satz von J. W. Alexander über die Zerlegung des $\mathfrak{R}^3$ durch eine simpliziale Kugelfläche.

Nach J. W. Alexander [1] ist das abgeschlossene Innere eines im $\mathfrak{R}^3$ liegenden, zu einer Kugelfläche homöomorphen Polyeders ein Elementarraumstück, d. h. homöomorph einer euklidischen Vollkugel. Wir benötigen im folgenden die schärfere Aussage, daß man durch *eine s-Abbildung des* $\mathfrak{R}^3$ das Polyeder in ein Tetraeder überführen kann. Der

Beweis hierfür kann durch geeignete Abänderung der von ALEXANDER benutzten Methode erbracht werden (vgl. GRAEUB [2]). Der ALEXANDERsche Satz wird immer im folgenden Zusammenhang gebraucht werden: es seien $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ zwei Elementarflächenstücke des $\mathfrak{R}^3$, die sich in einer geschlossenen, doppelpunktfreien Kurve c, die den Durchschnitt von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ ausmacht, durchdringen[1]). c liege ganz im Innern von $\mathfrak{E}$ und ebenso im Innern von $\mathfrak{F}$. Die Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$, die von c auf $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ berandet werden, bilden zusammen den Rand eines Elementarraumstückes $\mathfrak{K}$ (Fig. 4). Man kann dann, auschaulich gesprochen, $\mathfrak{f}$ über $\mathfrak{K}$ hinwegdeformieren, so daß schließlich $\mathfrak{F}$ in ein zu $\mathfrak{E}$ punktfremdes Elementarflächenstück übergeht. Genauer gibt es eine s-Abbildung φ_1 des $\mathfrak{R}^3$, die außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{K}$ und auf $\mathfrak{E}-\mathfrak{e}$ die Identität ist und die $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{e}$ überführt, so daß der Durchschnitt von $\varphi_1(\mathfrak{F})$ und $\mathfrak{E}$ das Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ ist. Durch eine anschließende s-Abbildung φ_2, die außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{e}$ die Identität ist, kann man dann $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{e}$ „abheben“, so daß $\varphi_2\varphi_1(\mathfrak{F})$ überhaupt punktfremd zu $\mathfrak{E}$ wird. Der Beweis ergibt sich, wenn man $\mathfrak{K}$ durch eine s-Abbildung in ein Tetraeder überführt, was man so einrichten kann, daß $\mathfrak{e}$ in die eine Seitenfläche, $\mathfrak{f}$ in die drei anderen Seitenflächen übergeht. An den durch diese Abbildung transformierten Flächen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ lassen sich die oben beschriebenen Operationen unmittelbar verfolgen.

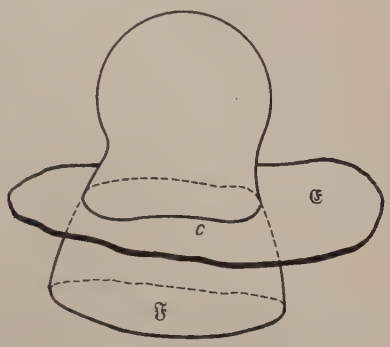

Fig. 4.

§ 2.

Sehnen in einem Elementarraumstück.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein Elementarraumstück des $\mathfrak{R}^3$ und q eine doppelpunktfreie Kurve, die, abgesehen von ihren Endpunkten A und B, die auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ liegen mögen, ganz im Innern von $\mathfrak{K}$ liege. Eine solche Kurve heiße eine *Sehne* von $\mathfrak{K}$. Wenn es möglich ist, A und B durch eine doppelpunktfreie Kurve p zu verbinden, die nicht in das Innere von $\mathfrak{K}$ eindringt, derart, daß $p+q$ eine unverknotete geschlossene Kurve wird, so heiße die Sehne q *unverknotet in* $\mathfrak{K}$. Man kann in diesem Falle eine s-Abbildung des $\mathfrak{R}^3$ angeben, die $\mathfrak{K}$ in ein Tetraeder und q in eine geradlinige Strecke überführt (vgl. SCHUBERT [4]).

[1]) Alle im folgenden vorkommenden Kurven und Flächen des $\mathfrak{R}^3$ sind simplizial, d. h. können aus euklidischen Simplexen aufgebaut werden.

§ 3.

Der Vollring $\mathfrak{V}$ und seine universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit $\hat{\mathfrak{V}}$.

Es sei l ein Schlingknoten und $\mathfrak{Y}$ ein in ihn eingespanntes Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung, definiert durch das Urbildquadrat $\overline{\mathfrak{Y}}$ und die Abbildung η. Ist k der Diagonalknoten von $\mathfrak{Y}$, so gibt es einen (simplizialen) Vollring $\mathfrak{V}$ mit der Seele k, der $\mathfrak{Y}$ ganz im Innern enthält, z. B. wird eine geeignete simpliziale Umgebung von $\mathfrak{Y}$ ein solcher Vollring sein. Wir können weiter ein Meridianflächenstück $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{V}$ angeben, dessen Durchschnitt mit $\mathfrak{Y}$ aus dem η-Bild der Diagonale $\overline{R}\,\overline{S}$ besteht. $\mathfrak{M}$ wird von l in den Punkten $R = \eta(\overline{R})$ und $S = \eta(\overline{S})$ durchsetzt (Fig. 5). Der Rand von $\mathfrak{V}$ ist ein Torus $\mathfrak{T}$.

Die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit $\hat{\mathfrak{V}}$ von $\mathfrak{V}$ ist homöomorph einem unendlichen Vollzylinder. Das Meridianflächenstück $\mathfrak{M}$ wird von unendlich vielen Elementarflächenstücken $\hat{\mathfrak{M}}_\nu (-\infty < \nu < +\infty)$ überlagert. Auf dem Diagonalknoten k erklären wir als positive Durchlaufung diejenige, die von A über d nach B führt. Die Numerierung der $\hat{\mathfrak{M}}_\nu$ nehmen wir dann in der Weise vor, daß, wenn man die Überlagerung $\hat{k}$ von k im positiven Sinne durchläuft, man der Reihe nach $\ldots \hat{\mathfrak{M}}_{\nu-1}, \hat{\mathfrak{M}}_\nu, \hat{\mathfrak{M}}_{\nu+1} \ldots$ trifft. Auf $\hat{\mathfrak{M}}_\nu$ liegen die Punkte $\hat{R}_\nu$ und $\hat{S}_\nu$, die R und S überlagern. $\hat{\mathfrak{M}}_\nu$ und $\hat{\mathfrak{M}}_{\nu+1}$ schneiden aus $\hat{\mathfrak{V}}$ einen Vollzylinder aus, den man auch dadurch erhalten kann, daß man $\mathfrak{V}$ längs $\mathfrak{M}$ aufschneidet. Dabei zerfällt $\mathfrak{Y}$ in zwei sich durchdringende Elementarflächenstücke, die beiden Dreiecke $\hat{R}_\nu \hat{S}_\nu \hat{B}_\nu$ und $\hat{R}_{\nu+1} \hat{S}_{\nu+1} \hat{A}_{\nu+1}$ (Fig. 6).

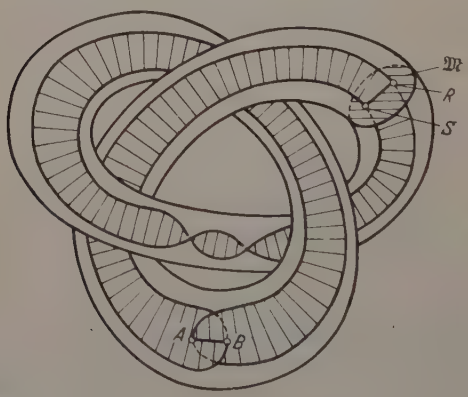

Fig. 5.

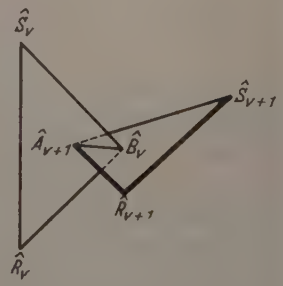

Fig. 6.

Der gesamte Überlagerungskomplex $\hat{\mathfrak{Y}}$ von $\mathfrak{Y}$ besteht daher aus unendlich vielen Elementarflächenstücken, den Quadraten $\hat{\mathfrak{Y}}_\nu = \hat{A}_\nu \hat{R}_\nu \hat{B}_\nu \hat{S}_\nu$,

on denen sich immer aufeinander folgende in einer Strecke durchringen (Fig. 7). Der Rand $\hat{l}_\nu$ von $\hat{\mathfrak{Y}}_\nu$ überlagert l topologisch.

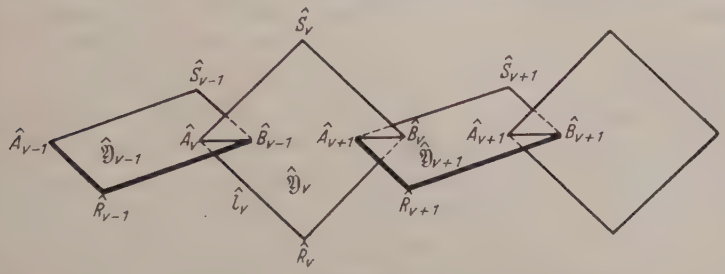

Fig. 7.

§ 4.

Geschlossene Kurven auf dem Torus $\mathfrak{T}$.

Hilfssatz 1. *Ist eine geschlossene Kurve c auf der Ringfläche $\mathfrak{T}$ nullhomotop in $\mathfrak{V}-l$, so ist c bereits nullhomotop auf $\mathfrak{T}$.*

Beweis. c ist nach Voraussetzung Rand eines in $\mathfrak{V}-l$ liegenden ngulären Elementarflächenstückes $\mathfrak{E}$, dessen Urbild $\overline{\mathfrak{E}}$ sei. $\mathfrak{E}$ entsteht lso aus $\overline{\mathfrak{E}}$ durch eine stetige Abbildung φ, von der wir annehmen önnen, daß sie simplizial ist, denn wir können sie nötigenfalls simpli- al approximieren. Ist $\overline{O}$ ein fester Punkt auf $\overline{\mathfrak{E}}$, $\hat{O}_0$ ein über $\varphi(\overline{O}) = O$ egender Punkt von $\hat{\mathfrak{V}}$, den wir ein für allemal fest aus der Reihe er über O liegenden Punkte auswählen, so gibt es genau eine stetige bbildung $\hat{\varphi}_0$ von $\overline{\mathfrak{E}}$ in $\hat{\mathfrak{V}}$ derart, daß für jeden Punkt $\overline{P}$ von $\overline{\mathfrak{E}}$ der unkt $\varphi_0(\overline{P})$ über $\varphi(\overline{P})$ liegt und $\varphi_0(\overline{O}) = \hat{O}_0$ ist. Diese Tatsache beht auf dem einfachen Zusammenhang von $\overline{\mathfrak{E}}$. Das singuläre Flächenück, das durch die Abbildung $\hat{\varphi}_0$ aus $\overline{\mathfrak{E}}$ entsteht, heiße $\hat{\mathfrak{E}}_0$ und sein and $\hat{c}_0$.

Wir konstruieren nun aus $\hat{\mathfrak{E}}_0$ ein in $\hat{c}_0$ eingespanntes singuläres lementarflächenstück, das punktfremd zu $\hat{\mathfrak{Y}}$ ist. Sollte dies bei $\hat{\mathfrak{E}}_0$ och nicht der Fall sein, so gibt es in der Reihe der Elementarflächenücke $\hat{\mathfrak{Y}}_\nu$ ein erstes, etwa $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$, das Punkte mit $\hat{\mathfrak{E}}_0$ gemein hat. $\hat{\mathfrak{E}}_0$ ist cher punktfremd zum Rande von $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$, da $\mathfrak{E}$ punktfremd zu l ist, und s ist $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$ punktfremd zum Rande von $\hat{\mathfrak{E}}_0$, da der Rand von $\hat{\mathfrak{E}}_0$ auf $\hat{\mathfrak{T}}$ egt. Das in $\overline{\mathfrak{E}}$ liegende Urbild des Durchschnittes von $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$ und $\hat{\mathfrak{E}}_0$ esteht daher, wenn man nötigenfalls die Ecken der Simplexe von $\hat{\mathfrak{E}}_0$ och beliebig wenig verschiebt, aus endlich vielen punktfremden doppelnktfreien Kurven. Es sei $\bar{s}$ eine von ihnen. Ihr Bild $\hat{\varphi}_0(\bar{s}) = \hat{s}_0$ ist nktfremd zu der Durchdringungsstrecke $\hat{A}_\alpha \hat{B}_{\alpha-1}$ von $\hat{\mathfrak{Y}}_{\alpha-1}$ mit $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$, eil sonst $\hat{\mathfrak{E}}_0$ Punkte mit $\hat{\mathfrak{Y}}_{\alpha-1}$ gemeinsam hätte, während doch $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$ as erste Elementarflächenstück war, mit dem $\hat{\mathfrak{E}}_0$ Punkte gemeinsam

hat. Ferner hat $\hat{s}_0$ die Verschlingungszahl 0 mit dem Rand von $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$, weil das von $\bar{s}$ auf $\bar{\mathfrak{E}}$ berandete Elementarflächenstück $\bar{e}$ bei der Abbildung $\hat{\varphi}_0$ in ein zu l, also auch zum Rande von $\hat{\mathfrak{Y}}_{\alpha+1}$ punktfremdes singuläres Elementarflächenstück $\hat{\mathfrak{e}}_0$ mit dem Rande $\hat{s}_0$ übergeht. Somit ist $\hat{s}_0$ nullhomotop auf dem im Punkte $\hat{A}_{\alpha+1}$ punktierten und längs der Strecke $\hat{A}_\alpha \hat{B}_{\alpha-1}$ aufgeschnittenen Elementarflächenstück $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$, also Rand eines auf $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$ liegenden, zu $\hat{A}_{\alpha+1}$ und der Strecke $\hat{A}_\alpha \hat{B}_{\alpha-1}$ punktfremden singulären Elementarflächenstückes $\hat{\mathfrak{f}}_0$. Wir ersetzen nun in $\hat{\mathfrak{E}}_0$ das Teilflächenstück $\hat{\mathfrak{e}}_0$ durch $\hat{\mathfrak{f}}_0$, heben dieses durch eine kleine Verschiebung seiner Ecken von $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$ ab und gewinnen so ein in ein eingespanntes singuläres, wieder mit $\hat{\mathfrak{E}}_0$ bezeichnetes Elementarflächenstück, das mit $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$ mindestens eine Schnittkurve weniger hat. So können wir fortfahren, bis alle Schnittkurven mit $\hat{\mathfrak{Y}}_\alpha$ beseitigt sind. Danach verfahren wir ebenso mit $\hat{\mathfrak{Y}}_{\alpha+1}$ usw., bis $\hat{\mathfrak{E}}_0$ punktfremd zu $\mathfrak{Y}$ ist. Dem $\hat{\mathfrak{E}}_0$ entspricht im Grundkomplex $\mathfrak{V}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{E}$, das punktfremd zu $\mathfrak{Y}$ und daher auch zur Seele von $\mathfrak{V}$ und das wir infolgedessen unter Festhaltung seines Randes c auf den Rand $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{V}$ deformieren können, d. h. c ist auf $\mathfrak{T}$ nullhomotop, was zu beweisen war.

Hilfssatz 2. *Ist eine geschlossene Kurve c auf der Ringfläche $\mathfrak{T}$ Rand eines in $\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{V} + \mathfrak{T}$ liegenden singularitätenfreien Elementarflächenstückes $\mathfrak{y}$ und ist die Seele von $\mathfrak{V}$ kein Kreis, so ist c nullhomotop auf $\mathfrak{T}$.*

Beweis. Es sei m ein Meridiankreis von $\mathfrak{V}$, b ein zu m konjugierter Rückkehrschnitt auf $\mathfrak{T}$, den wir so wählen können, daß er in $\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{V} + \mathfrak{T}$ nullhomolog ist. Dann besteht eine Homologie

$$c \sim \mu m + \beta b \quad \text{auf } \mathfrak{T}. \tag{1}$$

Die Verschlingungszahl von c und ebenso die von b mit der Seele von $\mathfrak{V}$ ist null, da c und b nullhomolog in $\mathfrak{R}^3 - \mathfrak{V} + \mathfrak{T}$ sind. Andererseits ist die Verschlingungszahl von m mit k gleich ± 1. Aus (1) folgt daher durch Übergang zu den Verschlingungszahlen $\mu = 0$. Wäre $|\beta| > 0$, so könnte c nicht doppelpunktfrei, also $\mathfrak{y}$ nicht singularitätenfrei sein. Wäre $\beta = \pm 1$, so wäre $\pm c$ homotop k in $\mathfrak{V}$ und man könnte in k ein singularitätenfreies Elementarflächenstück einspannen, bestehend aus $\mathfrak{y}$ und einem in $\mathfrak{V}$ verlaufenden Kreisring mit den Randkurven c und k, während doch k kein Kreis sein sollte. Es ist also $\beta = 0$ und daher c nullhomolog, also sogar nullhomotop auf $\mathfrak{T}$.

§ 5.

Elementarraumstück auf $\mathfrak{V}$.

Hilfssatz 3. *Es sei $\mathfrak{K}$ ein Elementarraumstück auf dem Vollring $\mathfrak{V}$. Dann kann der Schlingknoten l nicht auf $\mathfrak{K}$ liegen. Ist der Durchschnitt von l mit $\mathfrak{K}$ eine Sehne auf $\mathfrak{K}$, so ist diese unverknotet.*

Beweis. In $\hat{\mathfrak{B}}$ wird $\mathfrak{K}$ von unendlich vielen punktfremden Elementarraumstücken $\hat{\mathfrak{K}}_\nu (-\infty < \nu < +\infty)$ topologisch überlagert. Läge l auf $\mathfrak{K}$, so würde $\hat{l}_\nu$ (bei geeigneter Numerierung der $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$) auf $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$ liegen. Da in einem Elementarraumstück aber jede geschlossene Kurve nullhomotop ist, so wäre $\hat{l}_\nu$ Rand eines singulären, zu $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$ gehörigen Elementarflächenstückes $\hat{\mathfrak{Z}}_\nu$. Da $\hat{l}_\nu$ und $\hat{l}_{\nu+1}$ verschlungen sind, müßten sich $\hat{\mathfrak{Z}}_\nu$ und $\hat{\mathfrak{Z}}_{\nu+1}$ notwendig schneiden, was der Tatsache widerspricht, daß $\hat{\mathfrak{Z}}_\nu$ und $\hat{\mathfrak{Z}}_{\nu+1}$ den punktfremden Elementarraumstücken $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$ und $\hat{\mathfrak{K}}_{\nu+1}$ angehören. — Ist der Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ und l eine Sehne q auf $\mathfrak{K}$, so wird $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$ (bei geeigneter Numerierung der $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$) ein Stück $\hat{q}_\nu$ von $\hat{l}_\nu$ als Sehne enthalten. Man kann aber $\hat{q}_\nu$ außerhalb $\hat{\mathfrak{K}}_\nu$ zu einer unverknoteten geschlossenen Kurve, nämlich zu $\hat{l}_\nu$ ergänzen. Also ist $\hat{q}_\nu$ in $\hat{l}_\nu$ und daher q in $\mathfrak{K}$ unverknotet.

§ 6.

Beliebiges in $\mathfrak{B}$ liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{Y}^*$ mit Selbstdurchdringung.

Wir betrachten jetzt neben $\mathfrak{Y}$ ein weiteres in l eingespanntes Elementarflächenstück $\mathfrak{Y}^*$ mit Selbstdurchdringung. Es möge ebenso wie $\mathfrak{Y}$ im Innern von $\mathfrak{B}$ liegen. Als Urbild von $\mathfrak{Y}^*$ benutzen wir dasselbe Quadrat $\overline{\mathfrak{Y}} = \bar{A}\bar{R}\bar{B}'\bar{S}$ wie für $\mathfrak{Y}$. Die Abbildung, die $\overline{\mathfrak{Y}}$ in $\mathfrak{Y}^*$ überführt, sei η^*. Sie führt $\bar{A}, \bar{B}, \bar{R}, \bar{S}$ über in gewisse Punkte A^*, B^*, R^*, S^* von l und die Strecken $\bar{d}$ und $\bar{d}'$ in die Selbstdurchdringungslinie d^* von $\mathfrak{Y}^*$.

Es gibt zu η^* eine bestimmte überlagernde Abbildung $\hat{\eta}_\nu^*$, die $\overline{\mathfrak{Y}}$ stetig in die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit $\hat{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ abbildet und die folgenden Eigenschaften hat: Es liegt $\hat{\eta}_\nu^*(\bar{P})$ über $\eta^*(\bar{P})$ für jeden Punkt $\bar{P}$ von $\overline{\mathfrak{Y}}$, und der Rand von $\overline{\mathfrak{Y}}$ geht über in $\hat{l}_\nu$ (§ 3). $\hat{\mathfrak{Y}}_\nu^*$ sei das Bild von $\overline{\mathfrak{Y}}$ bei $\hat{\eta}_\nu^*$.

Hilfssatz 4. *Die Abbildung $\hat{\eta}_\nu^*$ von $\overline{\mathfrak{Y}}$ ist nicht nur stetig, sondern sogar topologisch.*

Beweis. Wäre das nicht der Fall, wäre also für zwei verschiedene Punkte $\bar{P}$ und $\bar{P}'$ von $\overline{\mathfrak{Y}}$ $\hat{\eta}_\nu^*(\bar{P}) = \hat{\eta}_\nu^*(\bar{P}')$, so wäre auch $\eta^*(\bar{P}) = \eta^*(\bar{P})$, d. h. $\bar{P}$ und $\bar{P}'$ wären entsprechende Punkte von $\bar{d}$ und $\bar{d}'$. Dann gilt aber für je zwei entsprechende Punkte $\bar{Q}$ und $\bar{Q}'$ von $\bar{d}$ und $\bar{d}'$ die Gleichung $\hat{\eta}_\nu^*(\bar{Q}) = \hat{\eta}_\nu^*(Q')$. Denn die geradlinige Strecke $\bar{P}\bar{Q}$ geht bei η^* in denselben Streckenzug über wie die Strecke $\bar{P}'\bar{Q}'$. Dieses gemeinsame Bild würde daher von ein- und demselben von $\hat{\eta}_\nu^*(\bar{P}) = \hat{\eta}_\nu^*(\bar{P}')$ ausgehendem Streckenzug überlagert, dessen Endpunkt der Stetigkeit von $\hat{\eta}_\nu^*$ wegen $\hat{\eta}_\nu^*(\bar{Q}) = \hat{\eta}_\nu^*(\bar{Q}')$ ist. Somit wäre die Abbildung von $\hat{\mathfrak{Y}}_\nu^*$ auf $\mathfrak{Y}^*$, die jedem Punkt von $\hat{\mathfrak{Y}}_\nu^*$ den darunterliegenden von $\mathfrak{Y}^*$ zu-

ordnet, eineindeutig. $\hat{\mathfrak{Y}}_\nu^*$ würde also keine zwei hinsichtlich der Dec bewegungsgruppe von $\mathfrak{V}$ äquivalenten Punkte enthalten können, d. die Flächenstücke $\hat{\mathfrak{Y}}_\nu^*(-\infty < \nu < +\infty)$, die ja aus einem beliebigen ve ihnen durch die Deckbewegungsgruppe hervorgehen, wären alle unte einander punktfremd. Das ist unmöglich, da z. B. die Ränder von $\mathfrak{Y}$ und $\hat{\mathfrak{Y}}_1^*$ verschlungen sind. Unsere Annahme, daß $\hat{\eta}_\nu^*$ nicht topologisc sei, war also falsch.

§ 7.

Überführung von $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}$.

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von

Hilfssatz 5. *Ist $\mathfrak{Y}^*$ ein beliebiges, im Vollring $\mathfrak{V}$ liegendes, in de Schlingknoten l eingespanntes Elementarflächenstück mit Selbstdurc dringung, so gibt es eine s-Abbildung des $\mathfrak{R}^3$, die außerhalb $\mathfrak{V}$ d Identität ist und die $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}$ überführt.*

Wir betrachten den Durchschnitt von $\mathfrak{Y}^*$ mit dem Meridianfläche stück $\mathfrak{M}$ oder vielmehr das Urbild dieses Durchschnittes in $\overline{\mathfrak{Y}}$. Durc eine s-Abbildung, die beliebig wenig von der Identität abweicht, kan man $\mathfrak{Y}^*$ nötigenfalls so abändern, daß das Urbild des Durchschnitt von $\mathfrak{Y}^*$ mit $\mathfrak{M}$ aus endlich vielen doppelpunktfreien punktfremde Kurven $\bar{c}, \bar{c}', \bar{c}'', \ldots$, den sogenannten *Schnittkurven* besteht, die alle ge schlossen sind bis auf eine, welche zwei Randpunkte von $\overline{\mathfrak{Y}}$, nämlich d Urbilder von R und S bei der Abbildung η^* verbindet. Diese seien $\overline{R}_*$ un $\overline{S}_*$. Es sind die einzigen Punkte des Randes von $\overline{\mathfrak{Y}}$, die dem System de Schnittkurven angehören. Wir können weiter durch beliebig klein Abänderung von $\mathfrak{Y}^*$ erreichen, daß A^* und B^*, die Endpunkte de Durchdringungslinie d^*, nicht auf $\mathfrak{M}$ liegen. Dann sind also $\overline{R}$ und $\overline{S}_*$ verschieden von $\overline{A}$ und $\overline{B}'$. Es wird dann auch keine Schnit kurve durch $\overline{A}'$ oder $\overline{B}$ gehen können. Wenn eine Schnittkurve d Strecken $\bar{d}$ oder $\bar{d}'$ trifft, so können wir erreichen, daß Schnitte un keine Berührungen stattfinden.

Hilfssatz 6. *Die auf dem Meridianflächenstück $\mathfrak{M}$ liegenden Durch dringungskurven $c^{(\mu)} = \eta^*(\bar{c}^{(\mu)})$ von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{Y}^*$ sind doppelpunktfr* (können sich aber gegenseitig treffen, was dann der Fall ist, wen $\mathfrak{M}$ von d^* getroffen wird).

Beweis. Nach Hilfssatz 4 ist die Abbildung $\hat{\eta}_\nu^*$ von $\overline{\mathfrak{Y}}$ topologisch führt also das doppelpunktfreie $\bar{c}^{(\mu)}$ in eine doppelpunktfreie Kurv $\hat{\eta}_0^*(\bar{c}^{(\mu)})$ auf einem gewissen $\hat{\mathfrak{M}}_\nu$ über. Da nun $\hat{\mathfrak{M}}_\nu$ topologisch über $\mathfrak{Y}$ liegt, so ist auch die zu $\hat{\eta}_0^*(\bar{c}^{(\mu)})$ gehörige Grundkurve, d. h. $\eta^*(\bar{c}^{(\mu)})$ doppelpunktfrei, was zu beweisen war.

Die in Hilfssatz 5 erwähnte Überführung von $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}$ geschieht in mehreren Schritten.

Erster Schritt. *Beseitigung der geschlossenen, zu $\bar{d}+\bar{d}'$ punktfremden Schnittkurven $\bar{c}^{(\mu)}$.*

Wenn es unter den geschlossenen Schnittkurven $\bar{c}^{(\mu)}$ überhaupt welche gibt, die punktfremd zu $\bar{d}+\bar{d}'$ sind, so gibt es auch mindestens eine, etwa $\bar{c}$, die im Innern keine weiteren Kurven $\bar{c}^{(\mu)}$ enthält. $\bar{c}$ berandet auf $\bar{\mathfrak{Y}}$ ein Elementarflächenstück $\bar{\mathfrak{y}}$, das, da es punktfremd zu $\bar{d}+\bar{d}'$ ist, vermöge η^* topologisch auf ein auf $\mathfrak{Y}^*$ liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{y}^*$ abgebildet wird. Der Rand c^* von $\mathfrak{y}^*$ ist auf $\mathfrak{M}$ Rand eines Elementarflächenstückes $\mathfrak{m}$. $\mathfrak{y}^*$ und $\mathfrak{m}$ haben nur den Rand c^* gemeinsam (weil $\bar{c}$ eine „kleinste" Schnittkurve war) und bilden somit den Rand eines Elementarraumstückes $\mathfrak{K}$. *$\mathfrak{K}$ liegt im Innern von $\mathfrak{V}$*, da dies von dem Rande von $\mathfrak{K}$ gilt. *Der Durchschnitt von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{K}$ ist* $\mathfrak{m}$. Würde nämlich ein Punkt von $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{K}$ gehören, so müßte, da $\mathfrak{y}^*$ punktfremd zu $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}$ ist, ganz $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{K}$ gehören. Der Rand von $\mathfrak{M}$ liegt aber sicher nicht auf $\mathfrak{K}$, da er auf dem Rande von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{K}$ im Innern von $\mathfrak{V}$ liegt. *$\mathfrak{K}$ ist punktfremd zu l*, denn $\mathfrak{y}^*$ ist punktfremd zu l, weil $\bar{\mathfrak{y}}$ weder $\bar{A}'$ noch $\bar{B}$ enthalten kann, da $\bar{c}$ punktfremd zu $\bar{d}+\bar{d}'$ ist. l hat also mit $\mathfrak{y}^*$ und daher auch mit dem dazu homologen Flächenstück $\mathfrak{m}$ die Schnittzahl 0. $\mathfrak{m}$ enthält daher entweder keinen der Punkte R, S oder beide. Letzteres ist unmöglich, da dann $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}+\mathfrak{y}^*$ punktfremd zu l wäre. Der Rand von $\mathfrak{M}$ wäre also nullhomotop in $\mathfrak{V}-l$, was Hilfssatz 1 widerspricht. l trifft daher den Rand von $\mathfrak{K}$ nicht. Daß l ganz im Innern von $\mathfrak{K}$ liegt, scheidet aus nach Hilfssatz 3.

Wir können somit durch eine s-Abbildung, die l, $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}$ und das Äußere von $\mathfrak{V}$ punktweise fest läßt, $\mathfrak{y}^*$ in $\mathfrak{m}$ überführen und anschließend von $\mathfrak{M}$ abheben (§ 1), wodurch $\mathfrak{Y}^*$ in ein Flächenstück übergeführt wird, das mit $\mathfrak{M}$ mindestens eine Schnittkurve weniger hat. Es verschwinden nämlich genau alle diejenigen $\bar{c}^{(\mu)}$, deren Bilder $\eta^*(\bar{c}^{(\mu)}) = c^{*(\mu)}$ vorher auf $\mathfrak{m}$ lagen, also mindestens $\bar{c}$. Man kann diesen Schritt wiederholen, bis keine zu $\bar{d}+\bar{d}'$ punktfremden geschlossenen Schnittkurven mehr vorhanden sind. *Die Anzahl der Schnittpunkte von $d^* = \eta^*(\bar{d}) = \eta^*(\bar{d}')$ hat sich bei dieser Abänderung von $\mathfrak{Y}^*$ offenbar nicht vergrößert.* Das abgeänderte Flächenstück $\mathfrak{Y}^*$ wird wiederum mit $\mathfrak{Y}^* = \eta^*(\mathfrak{Y})$ bezeichnet.

Zweiter Schritt. *Beseitigung aller geschlossenen Schnittkurven.* Dieser Schritt fällt aus, wenn nach Ausführung des ersten Schrittes bereits alle geschlossenen Schnittkurven verschwunden sind. Ist das nicht der Fall, so sei $\bar{c}$ eine geschlossene Schnittkurve, die keine anderen im Innern enthält. $\bar{c}$ hat mit $\bar{d}+\bar{d}'$ mindestens einen Punkt gemeinsam. $\bar{c}$ ist in $\bar{\mathfrak{Y}}$ Rand eines Elementarflächenstückes $\bar{\mathfrak{y}}$. *Die Abbildung η^* ist topologisch auf $\bar{\mathfrak{y}}$.* Denn $\eta_0^*(\bar{\mathfrak{y}})$ liegt, abgesehen von seinem Rand, zwischen zwei aufeinander folgenden Meridianflächen-

stücken $\hat{\mathfrak{M}}_\nu$ und $\hat{\mathfrak{M}}_{\nu+1}$, da sonst im Innern von $\bar{\mathfrak{y}}$ noch eine weitere Schnittkurve vorhanden wäre. $\hat{\eta}_0^*(\bar{\mathfrak{y}})$ enthält somit keine hinsichtlich der Deckbewegungsgruppe von $\hat{\mathfrak{V}}$ äquivalenten Punkte. Die Abbildung von $\hat{\eta}_0^*(\bar{\mathfrak{y}})$ auf $\eta^*(\bar{\mathfrak{y}})$, die jedem Punkt seinen Grundpunkt in $\mathfrak{V}$ zuordnet, ist somit topologisch, und da auch $\hat{\eta}_0^*$ auf $\bar{\mathfrak{y}}$ (ja sogar auf $\overline{\mathfrak{Y}}$) topologisch ist (Hilfssatz 4), so ist η^* topologisch auf $\bar{\mathfrak{y}}$. Das Bild heiße $\mathfrak{y}^*$. Der Rand c^* von $\mathfrak{y}^*$ begrenzt auf $\mathfrak{M}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{m}$.

Es sind drei Fälle denkbar: $\mathfrak{m}$ enthält von den Punkten R und S keinen, einen oder alle beide. Im ersten und dritten Falle hat $\mathfrak{m}$ und daher auch das zu $\mathfrak{m}$ homologe Elementarflächenstück $\mathfrak{y}^*$ die algebraische Schnittzahl 0 mit l. $\mathfrak{y}^*$ kann dann weder A^* noch B^* enthalten, denn A^* und B^* haben als Schnittpunkte von $\mathfrak{Y}^*$ mit l die gleiche Schnittzahl $+1$ oder -1.

Im ersten Falle ist also l punktfremd zu $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{y}^*$. Es liegen daher die gleichen Verhältnisse wie beim ersten Schritte vor, und wir können durch eine s-Abbildung, die l, $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}$ und das Äußere von $\mathfrak{V}$ punktweise fest läßt, $\mathfrak{y}^*$ in $\mathfrak{m}$ überführen und danach von $\mathfrak{M}$ abheben. *Bei dieser Abänderung von $\mathfrak{Y}^*$ gehen mindestens zwei Schnittpunkte von d^* mit $\mathfrak{M}$ verloren,* nämlich erstens die Endpunkte der „Sehnen" von $\mathfrak{y}^*$, die den Durchschnitt von d^* mit $\mathfrak{y}^*$ ausmachen (es gibt mindestens eine solche Sehne, da $\bar{d}+\bar{d}'$ nach Voraussetzung von $\bar{c}$ getroffen wird, aber wie wir sahen, weder $\bar{B}$ noch $\bar{A}'$ im Innern enthält) und zweitens die möglicherweise außerdem vorhandenen Schnittpunkte von d^* mit dem Innern von $\mathfrak{m}$.

Der dritte Fall scheidet aus, weil dann $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}$ punktfremd zu l wäre, d. h. es wäre der Rand von $\mathfrak{M}$ nullhomotop in $\mathfrak{V}-l$, nämlich Rand von $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}+\mathfrak{y}^*$, was nach Hilfssatz 1 nicht zutrifft.

Im *zweiten Falle* haben $\mathfrak{y}^*$ und $\mathfrak{m}$ die Schnittzahl ± 1 mit l. $\mathfrak{y}^*$ enthält also genau einen der Punkte A^* und B^*. Nehmen wir an, um die Begriffe zu fixieren, daß $\mathfrak{m}$ den Punkt R und $\mathfrak{y}^*$ den Punkt A^* enthält. Der Durchschnitt von l mit dem von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{y}^*$ berandeten Elementarraumstücke $\mathfrak{K}$ besteht in einer Sehne mit den Endpunkten R und A^*. Diese ist unverknotet in $\mathfrak{K}$ nach Hilfssatz 3. — Wir können daher durch eine s-Abbildung, die $\mathfrak{M}-\mathfrak{m}$ und das Äußere von $\mathfrak{V}$ punktweise fest läßt und l in sich überführt, $\mathfrak{y}^*$ in $\mathfrak{m}$ überführen und danach von $\mathfrak{M}$ abheben. Bei dieser Abänderung von $\mathfrak{Y}^*$ geht mindestens ein Schnittpunkt von d^* mit $\mathfrak{M}$ verloren.

In jedem Falle hat man damit die Anzahl der Schnittpunkte von d^* mit $\mathfrak{M}$ um mindestens eins verringert.

Nach Ausführung dieser Abänderung von $\mathfrak{Y}^*$ werden durch Wiederholung des ersten Schrittes etwa neu entstandene, zu $\bar{d}+\bar{d}'$ punktfremde geschlossene Schnittkurven beseitigt. Bleiben danach noch geschlossene Schnittkurven übrig, so wird die Anzahl der Schnitt-

punkte von d^* mit $\mathfrak{M}$ mit Hilfe des zweiten Schrittes weiter verringert usw., bis schließlich alle geschlossenen Schnittkurven verschwunden sind.

Es bleibt dann als Schnittkurve in $\overline{\mathfrak{Y}}$ nur noch eine $\overline{R}_*$ mit $\overline{S}_*$ verbindende doppelpunktfreie Kurve übrig, die wir wieder $\bar{c}$ nennen. *$\bar{c}$ ist punktfremd zu $\bar{d}+\bar{d}'$.* Wäre nämlich $\overline{C}$ ein auf $\bar{d}$ liegender Punkt von $\bar{c}$, also $\eta^*(\overline{C}) = C^*$ ein Punkt von $\mathfrak{M}$, so wäre auch $\eta^*(\overline{C}') = C^*$, wo $\overline{C}'$ der $\overline{C}$ entsprechende Punkt von $\bar{d}'$ ist. Es würde also $\overline{C}'$ auf $\bar{c}$ liegen. Die Abbildung η^* würde die beiden verschiedenen Punkte $\overline{C}$ und $\overline{C}'$ von $\bar{c}$ in denselben Punkt C^* abbilden, was nach Hilfssatz 6 unmöglich ist.

$\bar{c}$ trennt die beiden Strecken $\bar{d}$ und $\bar{d}'$ voneinander. Zum Beweise betrachten wir die auf $\overline{\mathfrak{Y}}$ topologische Abbildung $\hat{\eta}_0^*$ (§ 6). Sie führt $\bar{c}$ in eine auf $\hat{\mathfrak{M}}_0$ liegende, von $\hat{R}_0$ nach $\hat{S}_0$ führende Kurve $\hat{c}_0^*$ über. $\hat{R}_0$ und $\hat{S}_0$ zerlegen $\hat{l}_0$ in zwei Bögen $\hat{a}_0 = \hat{R}_0 \hat{A}_0 \hat{S}_0$ und $\hat{b}_0 = \hat{R}_0 \hat{B}_0 \hat{S}_0$. $\hat{c}_0^*$ zerlegt $\hat{\mathfrak{Y}}_0^*$ in zwei Elementarflächenstücke $\hat{\mathfrak{A}}_0^*$ und $\hat{\mathfrak{B}}_0^*$, die beziehungsweise von $\hat{a}_0 + \hat{c}_0^*$ und $\hat{b}_0 + \hat{c}_0^*$ begrenzt werden. Da diese beiden Ränder mit $\hat{l}_{-1}$ bzw. $\hat{l}_{+1}$ verschlungen sind, so hat $\hat{\mathfrak{A}}_0^*$ einen Punkt mit $\hat{l}_{-1}$ und $\hat{\mathfrak{B}}_0^*$ einen Punkt mit $\hat{l}_{+1}$ gemeinsam. Diesen Punkten entsprechen in dem zu $\hat{\mathfrak{Y}}_0^*$ homöomorphen Urbild $\overline{\mathfrak{Y}}$ notwendig die beiden Punkte $\overline{A}'$ und $\overline{B}$ (es bleibt dahingestellt, ob $\eta_0^*(\overline{A}') = \hat{A}_0^*$ in $\hat{\mathfrak{A}}_0^*$ oder in $\hat{\mathfrak{B}}_0^*$ liegt), da dies die einzigen Punkte im Innern von $\overline{\mathfrak{Y}}$ sind, deren η^*-Bilder auf l liegen. $\overline{B}$ und $\overline{A}'$ werden somit von $\bar{c}$ getrennt, was zu beweisen war.

Im Vollring $\mathfrak{V}$ haben wir also folgenden Sachverhalt: l wird durch die auf $\mathfrak{M}$ liegenden Punkte R und S in die beiden Bögen $RAS = a$ und $RBS = b$ zerlegt. $\mathfrak{Y}^*$ wird von $\mathfrak{M}$ in einer doppelpunktfreien Kurve c^* geschnitten, wodurch $\mathfrak{Y}^*$ in die beiden von $a + c^*$ bzw. $b + c^*$ berandeten Elementarflächenstücke $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ zerfällt. Der Durchschnitt von $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ besteht außer in dem gemeinsamen Randstück c^* in der zu $\mathfrak{M}$ punktfremden Durchdringungskurve d^*. — c, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ mögen die entsprechenden Bedeutungen für $\mathfrak{Y}$ haben.

Dritter Schritt. *Überführung von $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.*

Da wir es jetzt nur noch mit den *singularitätenfreien* Elementarflächenstücken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$ zu tun haben, brauchen wir das Urbild $\overline{\mathfrak{Y}}$ von $\mathfrak{Y}$ bzw. $\mathfrak{Y}^*$ nicht mehr zu benutzen. Durch eine s-Abbildung, die außerhalb $\mathfrak{V}$ die Identität ist, l punktweise fest läßt und $\mathfrak{M}$ auf sich abbildet, können wir c^* in c überführen. Dabei gehen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ in Elementarflächenstücke über, die wir wieder mit $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ bezeichnen, und die ebenso wie $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in $a + c$ bzw. $b + c$ eingespannt sind. Nunmehr können wir durch eine s-Abbildung, die a, c, $\mathfrak{M}$ und das Äußere von $\mathfrak{V}$ punktweise fest läßt und b in sich abbildet, $\mathfrak{A}^*$ in $\mathfrak{A}$ überführen. Durch eine s-Abbildung, die $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$ in sich

abbildet, können wir schließlich d^* in d und anschließend $\mathfrak{B}^*$ in $\mathfrak{B}$ überführen. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

§ 8.

Beliebiges in $\mathfrak{R}^3$ liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{Y}^*$ mit Selbstdurchdringung.

Satz I. *In einen Schlingknoten l seien zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}^*$ mit Selbstdurchdringung eingespannt, und es sei der Diagonalknoten k von $\mathfrak{Y}$ kein Kreis. Dann gibt es eine s-Abbildung φ des $\mathfrak{R}^3$, die $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}$ überführt.* — Ist k ein Kreis, so ist der Satz nicht mehr allgemein richtig (vgl. § 11).

Wir führen Satz I auf einen leichter beweisbaren Hilfssatz zurück, der sich nur dadurch von Satz I unterscheidet, daß an Stelle des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^3$ die dreidimensionale Sphäre $\mathfrak{S}^3$ betrachtet wird.

Es sei Σ ein 3-Simplex, das $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}^*$ im Innern enthält. Wir bilden es affin ab auf eine dreidimensionale Seite Σ' eines vierdimensionalen Simplexes $'S^4$, dessen Rand eine dreidimensionale Sphäre $'\mathfrak{S}^3$ ist. $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}^*$ mögen hierbei übergehen in $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Y}^{*\prime}$. Unter einer s-Abbildung von $'\mathfrak{S}^3$ verstehen wir eine simpliziale, topologische, die Orientierung erhaltende Selbstabbildung von $'\mathfrak{S}^3$. Angenommen, wir hätten eine s-Abbildung φ' von $'\mathfrak{S}^3$ konstruiert, die $\mathfrak{Y}^{*\prime}$ in $\mathfrak{Y}'$ überführt. Dann ergibt sich daraus die s-Abbildung φ des Satzes I folgendermaßen: bei φ' wird die Σ' gegenüberliegende Ecke P'_∞ von $'S^4$ in einen gewissen Punkt $\varphi'(P'_\infty)$ übergehen, der nicht auf $\mathfrak{Y}'$ liegt. Da $\mathfrak{Y}'$ die $'\mathfrak{S}^3$ nicht zerlegt, können wir $\varphi'(P'_\infty)$ mit P'_∞ durch einen $\mathfrak{Y}'$ nicht treffenden Weg verbinden und eine s-Abbildung φ'_1 von $'\mathfrak{S}^3$ konstruieren, die außerhalb einer beliebig kleinen, zu $\mathfrak{Y}'$ punktfremden Umgebung dieses Weges die Identität ist und $\varphi'(P'_\infty)$ in P'_∞ überführt. Die Produktabbildung $\varphi'_1\varphi'$ führt dann $\mathfrak{Y}^{*\prime}$ in $\mathfrak{Y}'$ über und läßt P'_∞ fest. Durch geeignete Wahl von φ'_1 können wir es sogar erreichen, daß bei $\varphi'_1\varphi'$ eine ganze Umgebung von P'_∞ punktweise fest bleibt, etwa ein den Punkt P'_∞ enthaltendes Elementarraumstück, das von $'\mathfrak{S}^3$ durch eine in $'S^4$ parallel zur Seite Σ' gezogene dreidimensionale Ebene abgeschnitten wird. Es sei $\mathfrak{s}'_1$ die zweidimensionale Randsphäre dieses Elementarraumstückes, $\mathfrak{s}'$ die Randsphäre von Σ' und $\mathfrak{s}'_2$ eine 2-Sphäre, die aus $\mathfrak{s}'$ durch ähnliche Verkleinerung mit dem Mittelpunkt von Σ' als Ähnlichkeitszentrum entsteht, und die sich so wenig von $\mathfrak{s}'$ unterscheidet, daß $\mathfrak{Y}'$ und $\mathfrak{Y}^{*\prime}$ auch noch im Innern von $\mathfrak{s}'_2$ liegen. Dabei verstehen wir unter dem Innern von $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}'_1$, $\mathfrak{s}'_2$ denjenigen von $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}'_1$, $\mathfrak{s}'_2$ begrenzten Teil von $'\mathfrak{S}^3$, der den Punkt P'_∞ nicht enthält. Es gibt nun eine s-Abbildung φ'_2 von $'\mathfrak{S}^3$, die das Innere von $\mathfrak{s}'_2$, insbesondere also $\mathfrak{Y}'$ und $\mathfrak{Y}^{*\prime}$ punktweise fest läßt und das Äußere von $\mathfrak{s}'$ in das Äußere von $\mathfrak{s}'_1$ überführt. Die

Abbildung $\varphi_2'^{-1}(\varphi'|\varphi')\,\varphi_2'$ läßt dann das Äußere von $\mathfrak{F}'$ punktweise fest und führt $\mathfrak{Y}^{*\prime}$ in $\mathfrak{Y}'$ über. Betrachten wir also diese Abbildung nur auf dem Simplex Σ', so läßt sie den Rand von Σ' punktweise fest und führt $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}'$ über. Die entsprechende Selbstabbildung von Σ, die wir außerhalb von Σ durch die identische Abbildung ergänzen, ist dann eine s-Abbildung φ des $\mathfrak{R}^3$, die $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}$ überführt. Satz I ist damit zurückgeführt auf den folgenden Hilfssatz (in den Bezeichnungen lassen wir die Striche nun wieder fort):

Hilfssatz 7. *In einen Schlingknoten l der dreidimensionalen Sphäre $\mathfrak{S}^3$ seien zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}^*$ mit Selbstdurchdringung eingespannt, und es sei der Diagonalknoten k von $\mathfrak{Y}$ kein Kreis. Dann gibt es eine s-Abbildung φ von $\mathfrak{S}^3$, die $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}$ überführt.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{V}$ ein Vollring mit der Seele k, der $\mathfrak{Y}$ im Inneren enthält. Es genügt nach Hilfssatz 5, eine s-Abbildung anzugeben, die l in sich und $\mathfrak{Y}^*$ in eine Teilmenge von $\mathfrak{V}$ überführt. $\mathfrak{T}$ sei der Rand von $\mathfrak{V}$, $\overline{\mathfrak{Y}}$ das Urbild von $\mathfrak{Y}^*$ (Fig. 1), η^* die Abbildung, die $\overline{\mathfrak{Y}}$ in $\mathfrak{Y}^*$ überführt. Wir betrachten in $\overline{\mathfrak{Y}}$ das Urbild des Durchschnittes von $\mathfrak{Y}^*$ und $\mathfrak{T}$. Es besteht, wenn man die Ecken von $\mathfrak{Y}^*$ nötigenfalls beliebig wenig ändert, aus endlich vielen doppelpunktfreien, punktfremden, geschlossenen „Schnittkurven" $\overline{c}$, $\overline{c}'$, ... Die Überführung von $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{V}$ geschieht in mehreren Schritten.

Erster Schritt. *Beseitigung der zu $\overline{d}+\overline{d}'$ punktfremden Schnittkurven $\overline{c}^{(\mu)}$.* Wenn es unter den Kurven $\overline{c}^{(\mu)}$ überhaupt welche gibt, die punktfremd zu $\overline{d}+\overline{d}'$ sind, so gibt es auch mindestens eine, etwa $\overline{c}$, die im Innern keine weitere Kurve $\overline{c}^{(\mu)}$ enthält. $\overline{c}$ berandet auf $\overline{\mathfrak{Y}}$ ein Elementarflächenstück $\overline{\mathfrak{y}}$, das bei η^* topologisch auf das auf $\mathfrak{Y}^*$ liegende Elementarflächenstück $\mathfrak{y}^*$ abgebildet wird. Die Randkurve c von $\mathfrak{y}^*$ ist eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve auf dem Torus $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{y}^*$ ist punktfremd zu l, da $\overline{\mathfrak{y}}$ weder $\overline{A}'$ noch $\overline{B}$ enthalten kann, wegen der Punktfremdheit von $\overline{c}$ und $\overline{d}+\overline{d}'$. $\mathfrak{y}^*$ liegt daher entweder in $\mathfrak{V}-l$ oder in $\mathfrak{S}^3-\mathfrak{V}+\mathfrak{T}$. Im ersten Falle ist c nullhomotop auf $\mathfrak{T}$ auf Grund von Hilfssatz 1, im zweiten Falle auf Grund von Hilfssatz 2, wobei wesentlich benutzt wird, daß k kein Kreis ist. c berandet also auf $\mathfrak{T}$ ein Elementarflächenstück t. $\mathfrak{y}^*$ und t haben nur den Rand c gemeinsam und bilden zusammen eine zu l punktfremde zweidimensionale Sphäre. Sie zerlegt $\mathfrak{S}^3$ in zwei Elementarraumstücke, von denen $\mathfrak{K}$ dasjenige sei, das l nicht enthält. Der Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{T}$ ist t. Die andere Möglichkeit, daß $\mathfrak{T}$ ganz zu $\mathfrak{K}$ gehört, scheidet nämlich aus, weil dann $\mathfrak{S}^3-\mathfrak{K}$ punktfremd zu $\mathfrak{T}$ wäre und andererseits l enthielte. Die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{S}^3-\mathfrak{K}$ wäre also ein in $\mathfrak{V}$ liegendes, l enthaltendes Elementarraumstück, was nach Hilfssatz 3 unmöglich ist. Durch eine s-Abbildung, die auf $\mathfrak{T}-\mathrm{t}$ und l die Identität ist, können wir $\mathfrak{y}^*$ in t überführen

und dann von $\mathfrak{T}$ abheben, wodurch $\mathfrak{Y}^*$ in ein Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung übergeht, das in l eingespannt ist und mindestens eine Schnittkurve weniger mit $\mathfrak{T}$ aufweist. Die Anzahl der Schnittpunkte der Selbstdurchdringungslinie d^* von $\mathfrak{Y}^*$ mit $\mathfrak{T}$ hat sich dabei sicher nicht vergrößert.

Zweiter Schritt. *Verminderung der Anzahl der Schnittpunkte von d^* mit $\mathfrak{T}$.* Nach wiederholter Ausführung des ersten Schrittes sind entweder alle Schnittkurven $\bar{c}^{(\mu)}$ verschwunden. Dann ist unser Ziel erreicht. Oder man gelangt zu einem Flächenstück $\mathfrak{Y}^*$, dessen Schnittkurven $\bar{c}^{(\mu)}$ alle $\bar{d}+\bar{d}'$ schneiden. Keine von ihnen kann $\bar{A}'$ oder $\bar{B}$ im Innern enthalten. Denn das η^*-Bild von $\bar{c}^{(\mu)}$ ist eine geschlossene Kurve auf dem Torus $\mathfrak{T}$ und hat daher mit l die Verschlingungszahl 0, da dies von der Homologiebasis von $\mathfrak{T}$, nämlich dem Meridiankreis m und dem in $\mathfrak{S}^3-\mathfrak{V}+\mathfrak{T}$ nullhomologen Breitenkreis b gilt. Würde aber $\bar{c}^{(\mu)}$ einen der Punkte $\bar{A}'$ oder $\bar{B}$ oder alle beide im Innern enthalten, so müßte die Verschlingungszahl von $\eta^*(\bar{c}^{(\mu)})$ mit l gleich ± 1 oder ± 2 sein. $\bar{c}^{(\mu)}$ schneidet daher sowohl $\bar{d}$ als auch $\bar{d}'$ eine gerade Anzahl von Malen.

Unter den Kurven $\bar{c}^{(\mu)}$ betrachten wir eine, sie heiße wieder $\bar{c}$, die keine andere im Innern enthält. $\bar{c}$ berandet ein Elementarflächenstück $\bar{\eta}$ auf $\bar{\mathfrak{Y}}$. Es kann nun sein, daß $\bar{\eta}$ bei η^* topologisch auf sein Bild $\mathfrak{y}^*$ abgebildet wird. $\mathfrak{y}^*$ ist punktfremd zu l, da $\bar{\eta}$ weder $\bar{A}'$ noch $\bar{B}$ enthält. Dann erkennt man wie beim ersten Schritt, daß der Rand c von $\mathfrak{y}^*$ auf $\mathfrak{T}$ ein Elementarflächenstück t berandet, und man beseitigt die Kurve $\bar{c}$ wie früher. Dabei geht $\mathfrak{Y}^*$ in ein neues Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung über, für das d^* mindestens zwei Schnittpunkte weniger mit $\mathfrak{T}$ hat.

Wir betrachten nun den Fall, daß $\bar{\eta}$ bei η^* nicht topologisch abgebildet wird. Der Durchschnitt von $\bar{d}+\bar{d}'$ mit $\bar{\eta}$ zerfällt in endlich viele zu einander punktfremde Kurvenbögen, die wir die *Sehnen* von $\bar{\eta}$ nennen. Wenn zwei Punkte $\bar{P}$ und $\bar{P}'$ von $\bar{\eta}$ bei η^* denselben Bildpunkt P haben sollen, so kann es nicht sein, daß $\bar{P}$ innerer Punkt und $\bar{P}'$ Randpunkt von $\bar{\eta}$ ist. Denn dann würde P als Bildpunkt von $\bar{P}'$ auf c, also auf $\mathfrak{T}$ liegen und es würde daher $\bar{P}$ dem Schnittsystem $\bar{c}^{(\mu)}$ angehören müssen, während wir doch angenommen hatten, daß im Innern von $\bar{c}$ keine weitere Kurve $\bar{c}^{(\mu)}$ liegt. Zwei äquivalente Punkte $\bar{P}$ und $\bar{P}'$ von $\bar{\eta}$ sind also entweder beide innere Punkte oder beide Randpunkte. Sind $\bar{P}$ und $\bar{P}'$ äquivalente Randpunkte, so ist ihr gemeinsamer Bildpunkt P ein Doppelpunkt von c und damit Endpunkt einer Selbstdurchdringungskurve des in c eingespannten Elementarflächenstückes $\mathfrak{y}^*$, des η^*-Bildes von $\bar{\eta}$, denn $\mathfrak{y}^*$ liegt ganz auf ein und derselben Seite des zweiseitig in der $\mathfrak{S}^3$ liegenden Torus $\mathfrak{T}$. Man erhält somit die äquivalenten Randpunkte von $\bar{\eta}$ als Grenz-

punkte von äquivalenten inneren Punkten. Wir finden also, daß die Singularitäten von $\mathfrak{y}^*$ nur dadurch zustandekommen können, daß gewisse Sehnen von $\bar{\mathfrak{y}}$ äquivalent sind, d. h. bei η^* topologisch auf dieselbe Bildkurve abgebildet werden. Zwei äquivalente Sehnen $\bar{s}$ und $\bar{s}'$ zerlegen $\bar{\mathfrak{y}}$ in zwei Segmente und eine Zone. Wir gewinnen aus den beiden Segmenten unter Fortlassung der zwischen ihnen liegenden Zone durch Identifizieren von $\bar{s}$ und $\bar{s}'$ ein neues Elementarflächenstück $\bar{\mathfrak{y}}_1$. Enthält $\bar{\mathfrak{y}}_1$ immer noch äquivalente Sehnen, $\bar{s}_1$ und $\bar{s}_1'$, so bilden wir aus den von ihnen auf $\bar{\mathfrak{y}}_1$ abgeschnittenen Segmenten unter Fortlassung der zwischen ihnen liegenden Zone durch Identifizieren von $\bar{s}_1$ und $\bar{s}_1'$ ein neues Elementarflächenstück $\bar{\mathfrak{y}}_2$ usw., bis wir nach endlich vielen Schritten zu einem Elementarflächenstück $\bar{\mathfrak{y}}_i$ gelangen, in dem keine äquivalenten Sehnen mehr vorkommen. Das Bild von $\bar{\mathfrak{y}}_i$ ist also ein singularitätenfreies, zu l punktfremdes Elementarflächenstück $\mathfrak{y}_i$, dessen Rand c_i nach Hilfssatz 1 bzw. 2 auf $\mathfrak{T}$ nullhomotop, also Rand eines Elementarflächenstückes t ist. Wie beim ersten Schritt wird durch eine s-Abbildung, die $\mathfrak{T}-\mathfrak{t}$ und l punktweise fest läßt, $\mathfrak{y}_i$ in t übergeführt und danach von $\mathfrak{T}$ abgehoben, wodurch $\mathfrak{Y}^*$ in ein Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung übergeht, das in l eingespannt ist und dessen Selbstdurchdringungskurve d^* mindestens zwei Schnittpunkte weniger mit $\mathfrak{T}$ aufweist.

Nach Ausführung dieses Schrittes werden durch Wiederholung des ersten Schrittes etwa neuentstandene, zu $\bar{d}+\bar{d}'$ punktfremde Schnittkurven beseitigt und dann, wenn nötig, der zweite Schritt wieder angewendet, wodurch sich die Anzahl der Schnittpunkte von d^* mit $\mathfrak{T}$ abermals verringert. So kann man schließlich alle Schnittpunkte von d^* mit $\mathfrak{T}$ und durch nochmalige Anwendung des ersten Schrittes die ganze Durchdringung von $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{Y}^*$ beseitigen. $\mathfrak{Y}^*$ liegt dann in $\mathfrak{V}$. Damit ist Hilfssatz 7 und Satz I bewiesen.

§ 9.

Der Diagonalknoten als Invariante des Schlingknotens.

Da bei der s-Abbildung des Satzes I, die $\mathfrak{Y}^*$ in $\mathfrak{Y}$ überführt, auch der Diagonalknoten k^* von $\mathfrak{Y}^*$ in den Diagonalknoten k von $\mathfrak{Y}$ übergeht, so sind k und k^* äquivalente Knoten. Gleiches gilt trivialerweise in dem Ausnahmefalle, wo k und k^* beide unverknotet sind. Es gilt daher

Satz II. *Sind $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}^*$ zwei in einen Schlingknoten l eingespannte Elementarflächenstücke mit Selbstdurchdringung, so sind die Diagonalknoten k und k^* von $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}^*$ äquivalent.*

Man kann auf Grund dieses Satzes jedem Schlingknoten l bis auf äquivalente einen bestimmten Knoten k zuordnen, den wir als den

zu l gehörigen Diagonalknoten bezeichnen können. Da diese Zuordnung offenbar invariant gegenüber s-Abbildungen des $\mathfrak{R}^3$ ist, so folgt

Satz III. *Eine notwendige Bedingung für die Äquivalenz zweier Schlingknoten ist die Äquivalenz ihrer Diagonalknoten.*

§ 10.

Eigenschnittzahl z und Verdrillungszahl v.

Ein Elementarflächenstück $\mathfrak{F}$ mit Selbstdurchdringung besitzt außer seinem Diagonalknoten noch zwei weitere Invarianten gegen s-Abbildungen. Unter der *Eigenschnittzahl* z von $\mathfrak{F}$ verstehen wir die Schnittzahl von $\mathfrak{F}$ mit seinem Rand l, wobei vorausgesetzt wird, daß die zur Bestimmung der Schnittzahl benutzte Orientierung von l diejenige ist, die von der willkürlich gewählten Orientierung von $\mathfrak{F}$ induziert wird. Kehrt man die Orientierung von $\mathfrak{F}$ um, so ändert sich also auch die Orientierung von l, sodaß die Schnittzahl ungeändert bleibt. Dagegen hängt sie von der Raumorientierung ab. Letztere ändert sich aber bei s-Abbildungen nicht. Die Eigenschnittzahl ist daher nach Festlegung einer bestimmten Raumorientierung eine Invariante von $\mathfrak{F}$ gegen s-Abbildungen. Ihr Wert kann offenbar nur $+2$ oder -2 sein. Spiegelbildliche Elementarflächenstücke mit Selbstdurchdringung haben entgegengesetzte Eigenschnittzahlen.

Zur Definition der Verdrillungszahl v von $\mathfrak{F}$ verbinden wir im Urbild $\overline{\mathfrak{F}}$ die Punkte $\overline{A}$ und $\overline{A}'$ durch eine Kurve α, die mit $\bar{d}+\bar{d}'$ nur Anfangspunkt und Endpunkt gemeinsam hat. Ebenso verbinden wir $\overline{B}$ und $\overline{B}'$ durch eine Kurve $\bar{\beta}$, die überdies punktfremd zu $\bar{\alpha}$ sei. Bei der Abbildung η von $\overline{\mathfrak{F}}$ auf $\mathfrak{F}$ gehen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ in die punktfremden geschlossenen Kurven α und β über, deren Verschlingungszahl wir als *Verdrillungszahl* v von $\mathfrak{F}$ erklären. v hängt nicht ab von der Wahl der Kurven $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$.

Da man ein Elementarflächenstück $\mathfrak{F}$ mit Selbstdurchdringung durch s-Abbildung stets in ein schmales Band überführen kann, dessen Verknotung durch den Diagonalknoten k angegeben wird (Fig. 2), so leuchtet ein, daß der Diagonalknoten k und die Zahlen $z = \pm 2$ und v beliebig vorgegeben werden können und $\mathfrak{F}$ bis auf s-Abbildungen bestimmen (vgl. Graeub [2]). Da ferner, wenn k kein Kreis ist, $\mathfrak{F}$ und sein Rand, der Schlingknoten l, sich nach Satz I umkehrbar eindeutig (bis auf s-Abbildungen) bestimmen, so folgt, *daß k, z, v charakteristische Invarianten des Schlingknotens l sind, vorausgesetzt, daß k kein Kreis ist.* Da dem Spiegelbild von l die Invarianten k, $-z$, $-v$ zukommen, so folgt weiter, *daß ein Schlingknoten, dessen Diagonalknoten kein Kreis ist, niemals seinem Spiegelbild äquivalent ist.*

§ 11.

Der Kreis als Diagonalknoten.

Wir betrachten ein Elementarflächenstück $\mathfrak{P}$ mit Selbstdurchdringung, dessen Diagonalknoten k ein Kreis ist. Es steht auf Grund unserer bisherigen Sätze nicht fest, ob Eigenschnittzahl z und Verdrillungszahl v von $\mathfrak{P}$ Invarianten des Randes l von $\mathfrak{P}$ sind. Auf alle Fälle ist $\mathfrak{P}$ und damit l durch die beiden Zahlen z und v bis auf äquivalente bestimmt. Wir bezeichnen daher l durch das Symbol (z, v). Um die Frage zu entscheiden, ob die Knoten (z_1, v_1) und (z_2, v_2) äquivalent sein können, berechnen wir nach einem der bekannten Verfahren die Homologiegruppe $\mathfrak{H}_2$ der zweiblättrigen zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_2$ der 3-Sphäre mit l als Verzweigungslinie. Da die Knoten (z, v) und $(-z, -v)$ Spiegelbilder

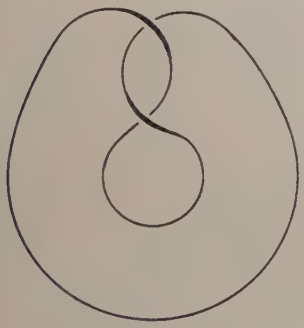

Fig. 8.

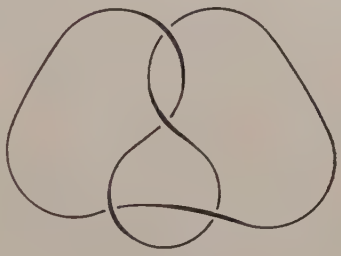

Fig. 9.

voneinander sind, also dieselbe Gruppe $\mathfrak{H}_2$ haben, genügt es, $z = +2$ vorauszusetzen. Es ergibt sich die zyklische Gruppe der Ordnung $|4v + 1|$. Hieraus folgt, daß zwei Knoten mit den verschiedenen Symbolen (z_1, v_1) und (z_2, v_2) höchstens dann äquivalent sein können, wenn $z_1 = -z_2$, $v_1 = -v_2$ ist, d. h. wenn die beiden Knoten Spiegelbilder voneinander sind. Die Frage, ob der Knoten $(2, v)$ seinem Spiegelbild äquivalent ist, ist zu bejahen für die Knoten (2,0) (Kreislinie, Fig. 8) und (2,1) (Viererknoten, Fig. 9), zu verneinen z. B. für diejenigen Knoten $(2, v)$, für die eine Primzahl der Form $4\varrho + 3$ in ungerader höchster Potenz in $|4v + 1|$ enthalten ist (s. Reidemeister [3]). Es ist zu vermuten, daß Kreislinie und Viererknoten die beiden einzigen Ausnahmen sind.

(Eingegangen am 7. Dezember 1948.)

Literatur.

J. W. Alexander.

[1] On the subdivision of 3-space by a polyhedron. Nat. Acad. Proc. **10** (1924), 6—8.

W. Graeub.

[2] Semilineare Abbildungen. (Erscheint in Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wissensch. Heidelberg.)

K. Reidemeister.

[3] Knotentheorie. Erg. d. Math. I, 1. (1932).

H. Schubert.

[4] Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten. Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wissensch. Heidelberg (1949).

H. Seifert.

[5] Über das Geschlecht von Knoten. Math. Ann. 110 (1934), 571—592.

J. H. C. Whitehead.

[6] On doubled knots. J. London Math. Soc. **12** (1937), 63—71.

Inseparable Körpererweiterungen[1]).

Von

G. Pickert in Tübingen.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit will Bausteine zu einer Strukturtheorie der inseparablen Erweiterungen beitragen. Über derartige Erweiterungen ist allgemein noch recht wenig bekannt. Während für die separablen Erweiterungen die Galoissche Theorie eine sogar die unendlichen Erweiterungen umfassende Strukturtheorie liefert, versagt dieses Werkzeug bei den inseparablen Erweiterungen insofern, als es nur Aussagen über deren separable Anteile liefern kann. Die der Galoisschen Theorie nachgebildete Theorie von Jacobson [5][2]) vermag keinen Ersatz zu schaffen, da sie einmal auf inseparable Erweiterungen vom Exponenten eins beschränkt bleibt, zum andern die in ihr den Erweiterungen zugeordneten Lie-Algebren strukturmäßig nicht einfacher, sondern eher schwieriger zu überblicken sind als die inseparablen Erweiterungen. Abweichend von derartigen Versuchen wollen wir hier keine Zuordnung von Erweiterungen zu andern algebraischen Gebilden herstellen, sondern im Wesentlichen gewisse Strukturinvarianten inseparabler Erweiterungen auffinden und näher untersuchen, deren Werte natürliche Zahlen bzw. Mächtigkeiten sind. Dabei erweist es sich allerdings als notwendig, bei den unendlichen Erweiterungen gänzlich andere Wege einzuschlagen als bei den endlichen.

Ein einigendes Band bilden jedoch die Begriffe der p-Abhängigkeit und des Unvollkommenheitsgrades, deren 1936 durch Teichmüller [15] erfolgte Einführung den ersten wesentlichen Fortschritt in der Theorie der inseparablen Erweiterungen seit der klassischen Steinitzschen Arbeit [14] vom Jahre 1910 darstellt. Dadurch wird eine von der Steinitzschen etwas abweichende Darstellungsart der grundlegenden Tatsachen über inseparable Erweiterungen notwendig, die die ersten beiden Paragraphen zusammen mit einigen Ergänzungen geben. Der dritte Paragraph behandelt die auf eine frühere Arbeit [10] zurückgehende Normalform $K(a_1, \ldots, a_m)$ für endliche, rein-inseparable Erweiterungen,

[1]) Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität in Tübingen als Habilitationsschrift angenommen.

[2]) Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

die dadurch charakterisiert ist, daß $a_i (i = 1, \ldots, m)$ bezüglich $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ einen nichtverschwindenden, nichtkleineren Exponenten e_i besitzt als die $a_{i+1}, \ldots, a_m$. Die e_i sind nun Strukturinvarianten, und ihre Anzahl m stellt die Vielfachheit, d. h. die Minimalzahl von Erzeugenden, der Erweiterung dar.

Dabei bildet der Zusammenhang zwischen den e_i und gewissen Rangzahlen der aus $L = K(a_1, \ldots, a_m)$ durch Erweiterung von K zu einem Zerfällungskörper entstehenden primären Algebra die Grundlage für den Invarianzbeweis. Diese Methode zusammen mit der Bedeutung, die der Kompositumbildung in der Galoisschen Theorie zukommt, führt zu dem in § 5 dargelegten Verfahren, nähere Aussagen über Exponenten und Vielfachheiten durch Betrachtung von Kompositum LM und Algebrenprodukt $L \times M$ zweier Erweiterungen $L|K$ und $M|K$ zu gewinnen. Hierzu liefert § 4 neben einigen an sich interessanten Strukturaussagen die erforderlichen Grundlagen. Die wesentlichen Ergebnisse der Methode sind Zusammenhänge zwischen den Exponenten und damit auch den Vielfachheiten der Erweiterungen $L|K$, $L|M$, $M|K$, wenn M Zwischenkörper von $L|K$ ist. Wichtiges Hilfsmittel ist dabei die doppelte Erzeugung von $L \times M$ einmal als Grundkörpererweiterung L_M von $L|K$, das andere Mal als Grundkörpererweiterung M_L von $M|K$. Als Verallgemeinerung eines bekannten Steinitzschen Satzes ergibt sich so, daß jeder Zwischenkörper einer Erweiterung der Vielfachheit m eine Vielfachheit $\leqq m$ besitzt (Satz 28). Eine völlige Ausnutzung der Methode scheint jedoch im allgemeinen Fall nicht möglich zu sein, weshalb in § 6 nur die einfachsten Spezialfälle vollständig durchgeführt werden.

Im zweiten Abschnitt werden die Ergebnisse der Paragraphen 3 und 4 auf endliche Erweiterungen einfacher rein-transzendenter Erweiterungen angewendet. Für die Vielfachheit derartiger Funktionenkörper wird in Satz 34 als obere Grenze der Unvollkommenheitsgrad des Konstantenkörpers angegeben. Satz 36 liefert ein Kriterium für die separable Erzeugbarkeit bei fastvollkommenem Konstantenkörper. Ferner beweist in § 7 noch ein Gegenbeispiel, daß aus der Vielfachheit eines Funktionenkörpers keine Schlüsse auf die Vielfachheit des Restklassenkörpers nach einem Primdivisor gezogen werden können. In diesem Zusammerhang wird ein Fehler aus einer früheren Arbeit [10] aufgewiesen und berichtigt. § 8 untersucht die Frage, inwieweit aus dem Algebrenprodukt des Restklassenkörpers eines Primdivisors mit einer Konstantenerweiterung die durch die Konstantenerweiterung hervorgerufene Zerlegung des Primdivisors den Graden, Exponenten und Restklassenkörpern nach bestimmt ist. Während bei separabler Konstantenerweiterung diese Bestimmung vollständig möglich ist, liefert für inseparable Erweiterungen Satz 42 ein wesentlich schwächeres Ergebnis, das — wie Gegenbeispiele belegen — auch nicht verschärft werden kann.

Der dritte Abschnitt behandelt — wie früher schon in einem Vortrag skizziert [11] — die unendlichen rein-inseparablen Erweiterungen getrennt nach zwei Typen: den *rein-unendlichen*, die durch Adjunktion sämtlicher p-ter, p^2-ter, p^3-ter, u. s. f. Wurzeln aus den Elementen einer gewissen Menge entstehen, und den *halbendlichen* Erweiterungen $L|K$, bei denen aus $a \varepsilon K - K^p$ die Existenz eines n mit $a^{p^{-n}} \varepsilon L - L^p$ folgt. Satz 52 stellt fest, daß jede rein-inseparable Erweiterung sich auf genau eine Weise als halbendliche Erweiterung einer rein-unendlichen auffassen läßt. Zur näheren Untersuchung der rein-unendlichen Erweiterungen in § 9 wird der ebenso wie der Begriff der p-Abhängigkeit den Abhängigkeitsaxiomen (S. 9) genügende Begriff der *U-Abhängigkeit* eingeführt. Dem Unvollkommenheitsgrad eines Körpers entspricht hierbei der *U-Grad* einer rein-unendlichen Erweiterung $L|K$. Seinen Zusammenhang mit den Unvollkommenheitsgraden von L und K beschreibt Satz 48, mit dessen Hilfe auch der Beweis der Tatsache gelingt, daß der Unvollkommenheitsgrad eines algebraischen Erweiterungskörpers nicht größer ist als der Unvollkommenheitsgrad des Grundkörpers (Satz 50). In § 10 werden halbendliche Erweiterungen ohne Exponenten — die also nicht in einer p^{-e}-ten Potenz des Grundkörpers liegen — angegeben, bei denen eine Veränderung des Unvollkommenheitsgrades eintritt. Ein von MacLane [8] konstruiertes Beispiel zeigt, daß dies auch bei Grundkörpern von endlichem Unvollkommenheitsgrad eintreten kann. Zugleich ist damit die Existenz von unendlichen, halbendlichen Erweiterungen über gewissen Körpern von endlichem Unvollkommenheitsgrad bewiesen.

I. Endliche Erweiterungen.

§ 1.
Grundbegriffe.

Ist K ein Körper der Primzahlcharakteristik p, so nennt man nach Steinitz [14, S. 231] ein irreduzibles Polynom aus $K[x]$ ohne mehrfache Nullstellen *von erster Art*. Van der Waerden [17, S. 126] hat hierfür die im Folgenden verwandte Bezeichnung *separabel* eingeführt. Die in einem Oberkörper von K liegenden Nullstellen eines solchen Polynoms werden in gleicher Weise benannt. Eine Erweiterung $L|K$ heißt separabel, wenn sämtliche Elemente von L separabel über K sind, andernfalls *inseparabel*. Stellen wir ein beliebiges irreduzibles Polynom aus $K[x]$ durch maximale Wahl von e in der Form

$$f(x) = g(x^{p^e}) \tag{1}$$

dar, so ist g separabel. f sowie seine Nullstellen heißen dementsprechend *inseparabel* — bei Steinitz *von zweiter Art* —, wenn $e > 0$. Der Grad

n_0 von g, der mit dem Grad n von f durch

$$n = n_0 p^e \tag{2}$$

zusammenhängt, wird *reduzierter Grad* des Polynoms und seiner Null stellen genannt und e als deren *Exponent* bezeichnet [14, S. 231]. $L = K(a)$ mit $f(a) = 0$ besitzt in einem genügend umfassenden Oberkörper genau n_0 relative Isomorphismen [17, S. 127—129]. Eine beliebige endliche Erweiterung $L = K(a_1, \ldots, a_s)$ mit $n^{(i)}$, $n_0^{(i)}$ als Grad und reduziertem Grad von a_i über $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ besitzt also $\prod_{i=1}^{s} n_0^{(i)} = n_0$ relative Isomorphismen und mit $n = \prod_{i=1}^{s} n^{(i)} = (L:K)$, den Grad von L über K, gilt wieder eine Beziehung (2). Bei separablem $L|K$ ist $n = n_0$. Da aber die Erzeugung von $L|K$ mit irgendeinem Element von L begonnen werden kann, folgt auch umgekehrt aus $n = n_0$ die Separabilität. Zugleich ist damit gezeigt, daß durch sukzessive Adjunktion separabler Elemente stets eine separable Erweiterung entsteht.

Nach Teichmüller [15, S. 367] heißt eine algebraische Erweiterung $L|K$ *rein-inseparabel*, wenn jedes bez. K separable Element von L bereits in K liegt. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß jedes Element bez. K den reduzierten Grad 1 besitzt, also in (1) das Polynom g immer linear ist:

$$f(x) = x^{p^e} - \alpha. \tag{3}$$

Das betreffende Element sowie sein Polynom (3) werden dann ebenfalls rein-inseparabel genannt. Die so eingeführten Bezeichnungen decken sich mit den Steinitzschen Benennungen *Wurzelkörper* und *Wurzelelement* [14, S. 229]. Sukzessive Adjunktion rein-inseparabler Elemente ergibt stets wieder eine rein-inseparable Erweiterung. „Rein inseparabel" ist nicht Unterbegriff von „inseparabel": Genau die Elemente von K selbst sind bez. K sowohl separabel wie rein-inseparabel. Diese Tatsache läßt sich auch für Erweiterungen formulieren [15, S. 367, Satz 5]. Rein-inseparable Polynome (3) besitzen ein besonders einfaches Irreduzibilitätskriterium, nämlich: α nicht in K^p. Dabei soll M^p allgemein die Menge der p-ten Potenzen aller Elemente der Menge M bedeuten. Aus diesem Kriterium ergibt sich sofort

Satz 1. *Ein irreduzibles, rein-inseparables Polynom bleibt irreduzibel bei separabler Erweiterung seines Koeffizientenkörpers.*

Daraus wieder leitet man her den

Satz 2. *Ein Kompositum S der rein-inseparablen Erweiterung $L|K$ und der separablen Erweiterung $M|K$ ist isomorph dem Algebrenprodukt $L \times M$ mit K als Grundkörper, also separabel über L mit $(S:L) = (M:K)$ und rein-inseparabel über M mit $(S:M) = (L:K)$.*

Denn eine Basis von $L|K$ ist wegen Satz 1 auch Basis von $S|M$

Nach Steinitz [14, S. 238] gibt es zu einer algebraischen Erweiterung $L|K$ genau einen Zwischenkörper Z so, daß $L|Z$ rein-inseparabel und $Z|K$ separabel ist, und zwar besteht Z aus allen bez. K separablen Elementen von L. Wir nennen ihn daher den *maximalen separablen Zwischenkörper (m. s. Zk.)* von $L|K$. Ist $(Z:K)$ endlich, so gibt dieser Grad die Anzahl der relativen Isomorphismen von $L|K$ an und heißt daher *reduzierter Grad* von $L|K$. Besitzen die Exponenten der Elemente von L ein Maximum, so heißt dieses der *Exponent der Erweiterung*. Er ist gleich der kleinsten Zahl e mit $L^{p^e} \subseteq Z$. Erweiterungen, die ein solches Maximum nicht besitzen, bezeichnen wir als *Erweiterungen ohne Exponenten*. Ist $(L:Z)$ endlich, also $= p^f$, so wird es der *Inseparabilitätsgrad* von $L|K$ genannt. Den zwischen e und f bestehenden Zusammenhang werden wir in § 3 näher untersuchen. Offenbar ist

$$e \leqq f. \tag{4}$$

Eine Antwort auf die Frage nach der andern Möglichkeit einer Zerlegung in rein-inseparable und separable Erweiterung gibt

Satz 3. *Es gibt zu einer algebraischen Erweiterung $L|K$ höchstens einen über K rein-inseparablen Zwischenkörper S, über dem L separabel ist. S existiert nicht immer, wohl aber dann, wenn $L|K$ normal ist.*

Die Eindeutigkeit ergibt sich daraus, daß ein solches S sämtliche über K rein-inseparablen Elemente von L und nur diese enthält: Ein über K rein-inseparables Element ist auch über S rein-inseparabel, zugleich aber über S separabel. Eine Erweiterung ohne derartigen Zwischenkörper konstruieren wir so: Wie im Folgenden stets seien u, v über dem Primkörper P_p der Charakteristik $p > 2$ algebraisch unabhängig. Dann setzen wir $K = P_p(u, v)$, $f(x) = x^{2p} + u\,x^p + v$, $L = K(a)$ mit $f(a) = 0$. Da f in einem genügend umfassenden Körper zwei verschiedene p-fache Nullstellen besitzt, zerfällt es über einem Oberkörper von K in einer der Arten $(x-b)^p(x-c)^p$, $(x^p-b)(x^p-c)$, $(x^2+b\,x+c)^p$ oder ist irreduzibel. Über K ist danach f irreduzibel, während über einem Zwischenkörper S der besprochenen Art die dritte Art der Zerlegung auftreten müßte. Das ist jedoch wegen $u = b^p$, $v = c^p$, $(K(b, c) : K) = p^2 > 2\,p$ unmöglich. Der letzte Teil des Satzes wird nach einer Bemerkung bei Deuring [2, S. 290] so bewiesen: Ist $\mathfrak{G}$ die Galoissche Gruppe von $L|K$, so ist der aus allen von ganz $\mathfrak{G}$ festgelassenen Elementen bestehende Zwischenkörper S' der Körper S. Denn $S'|K$ besitzt außer dem identischen keinen relativen Isomorphismus, ist also rein-inseparabel. Die linksseitigen Nebenklassen (Isomorphismen als Linksoperatoren geschrieben!) der ein Element $a \varepsilon L$ festlassenden Untergruppe von $\mathfrak{G}$ führen ferner a in seine verschiedenen Konjugierten $a', \ldots, a^{(n-1)}$ über, werden untereinander aber durch linksseitige Multiplikation mit irgendeinem Element von $\mathfrak{G}$ permutiert. Daher liegen die elementarsymmetrischen Funktionen der $a, a', \ldots, a^{(n-1)}$ in S', d. h. a ist als Nullstelle von $(x-a)\,(x-a')\,\ldots\,(x-a^{(n-1)})$

separabel bez. S'. — Das Zuordnungsschema von Untergruppen $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}$ und Zwischenkörpern T Fig. 1 ist dabei für $S \supset K$ nur in einer Richtung eindeutig, da ja z. B. alle Unterkörper von S durch ganz $\mathfrak{G}$ elementweis festgelassen werden. Diese bekannte Tatsache beleuchtet die Unbrauchbarkeit der Galoisschen Theorie für Strukturuntersuchungen, bei denen es gerade auf den rein-inseparablen Anteil ankommt.

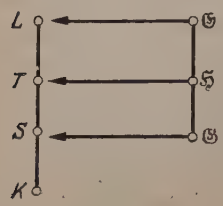

Fig. 1.

Während die Zerlegung entsprechend Satz 3 also nur in Sonderfällen möglich ist, führt die Verwendung des m. s. Zk. allgemein Strukturfragen inseparabler Erweiterungen auf solche von separablen und von rein-inseparablen Erweiterungen zurück. Für die Frage nach den Zwischenkörpern wird diese Reduktion gegeben durch

Satz 4. *Ist Z der m. s. Zk. von $L|K$, so sind alle Zwischenkörper von gleichem m. s. Zk. eineindeutig gewissen Zwischenkörpern von $L|Z$ zugeordnet.*

Es sei L' ein Zwischenkörper mit Z' als m. s. Zk. Das Kompositum L^* von Z und L' ist dann Zwischenkörper von $L|Z$ und nach Satz 2 separabel über L' (Fig. 2). Nach Satz 3 ist L' daher auch durch L^* und Z' eindeutig bestimmt.

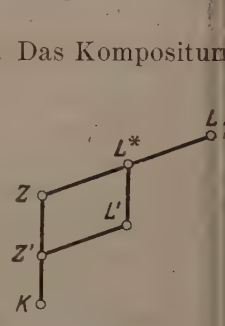

Fig. 2.

Der Satz vom primitiven Element besagt bekanntlich [17, S. 132], daß jede endliche Erweiterung $K(a_1, \ldots, a_s)$ mit über K separablen $a_2, \ldots, a_s$ — insbesondere jede endliche separable Erweiterung — durch Adjunktion *eines* Elementes erzeugt werden kann, also — wie man kurz sagt — *einfach* ist. Es genügt aber bereits, die Separabilität von a_i bez. $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ für $i = 2, \ldots, s$ zu fordern. Zum Beweis können wir uns auf $s = 2$ beschränken. d. h. auf

Satz 5. *$K(a, b)$ ist einfach, wenn a algebraisch über K und b separabel bez. $K(a)$ ist.*

Denn mit e als dem Exponent von a bez. K ist b^{p^e} separabel bez. $K^{p^e}(a^{p^e})$, also erst recht bez. $K(a^{p^e})$ und damit auch bez. K. Es gibt daher ein c mit $K(a, b^{p^e}) = K(c)$. Da ferner b separabel über $K(a)$, also erst recht über $K(c)$ ist, liegt es als über $K(c)$ rein-inseparable in diesem Körper: $K(a, b) = K(c)$.

Es gibt nun [14, S. 223—224] endliche inseparable Erweiterungen, die nicht einfach sind. Eine für Strukturuntersuchungen endlicher inseparabler Erweiterungen wesentliche Invariante ist daher die Minimalzahl von Erzeugenden. Diese war in [10, S. 220] für rein-inseparable Erweiterungen als *Inseparabilitätsrang* bezeichnet worden. Im Folgenden soll sie für beliebige endliche Erweiterungen *Vielfachheit* genannt

werden, während der Ausdruck „Inseparabilitätsrang" für die Vielfachheit bez. des m. s. Zk. nur dort gebraucht werden wird, wo es notwendig ist, diese Vielfachheit von der bez. des Grundkörpers zu unterscheiden. Eine Erweiterung der Vielfachheit m wird gelegentlich auch als *m-fache Erweiterung* bezeichnet. Einfache Erweiterungen sind vor den mehrfachen durch die Endlichkeit ihrer Zwischenkörperzahl ausgezeichnet [14, S. 244]. Im rein-inseparablen Fall gilt speziell

Satz 6. *Eine rein-inseparable Erweiterung $L = K(a)$ vom Grad p^e besitzt für jede natürliche Zahl $e' < e$ genau einen Zwischenkörper vom Grad $p^{e'}$, nämlich $K(a^{p^{e-e'}})$, der also von der Wahl der Erzeugenden a unabhängig ist.*

Denn aus $K \subset Z \subset L$, $(Z:K) = p^{e'}$ folgt $(L:Z) = p^{e-e'}$, also wegen (4) $b = a^{p^{e-e'}} \varepsilon Z$, $K(b) \subseteq Z$ und daraus wegen der sich aus $b^{p^{e'}} \varepsilon K - K^p$ ergebenden Gradrelation $(K(b):K) = (Z:K)$ die Behauptung $Z = K(b)$.

§ 2.

p-Abhängigkeit und Unvollkommenheitsgrad.

Um Strukturfragen rein-inseparabler Erweiterungen zu klären, muß man untersuchen, welche p-ten Wurzeln bei Adjunktion gewisser p-ter Wurzeln bereits miterfaßt sind. Dabei wird man zu dem auf Teichmüller [15, S. 368 u. ff.] zurückgehenden Begriff der p-Abhängigkeit geführt:

$a \varepsilon K$ heißt *p-abhängig* von der Menge $M \subseteq K$, wenn $a \varepsilon K^p(M)$ ist.

Nach Teichmüller genügt dieser Begriff den formalen *Abhängigkeitsaxiomen* [17, S. 105]:

I. *Ist a von M abhängig, so bereits von einer endlichen Teilmenge von M.*

II. *a ist abhängig von $a, a_1, \ldots, a_n$.*

III. *Ist b abhängig von $a, a_1, \ldots, a_n$, aber nicht von $a_1, \ldots, a_n$, so ist a abhängig von $b, a_1, \ldots, a_n$.*

IV. *Ist c abhängig von $b_1, \ldots, b_m$ und jedes b_i abhängig von $a_1, \ldots, a_n$, so ist auch c abhängig von $a_1, \ldots, a_n$.*

Üblicherweise wird dabei ein von der Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ abhängiges Element als von den $a_1, \ldots, a_n$ abhängig bezeichnet. Eine Menge heißt unabhängig — in unserm Fall also *p-unabhängig* — wenn kein Element aus M von andern Elementen dieser Menge abhängig ist. Die p-Unabhängigkeit der $a_1, \ldots, a_n \varepsilon K$ drückt sich also in der Gradbeziehung $(K^p(a_1, \ldots, a_n) : K^p) = p^n$ aus.

Zusammen mit den Axiomen I—IV gelten nun auch alle z. B. aus der Theorie der linearen Abhängigkeit bekannten Folgesätze [17, S. 105 u. ff.]. Es gibt also p-unabhängige Mengen B, von denen jedes Element aus K p-abhängig ist, d. h. für die

$$K = K^p(B) \tag{5}$$

gilt. Alle solche Mengen B, die nach TEICHMÜLLER als *p-Basen* von K bezeichnet werden, haben gleiche Mächtigkeit, den *Unvollkommenheitsgrad* von K, im folgenden mit Uvg (K) abgekürzt. Diese letzte, ebenfalls auf TEICHMÜLLER zurückgehende Benennung ist dadurch veranlaßt, daß nach (5) die vollkommenen Körper durch leere p-Basen charakterisiert sind. Durch vollständige Induktion läßt sich (5) übrigens sofort zu

$$K = K^{p^e}(B) \qquad (e = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

verallgemeinern.

Einen Zusammenhang zwischen p-Abhängigkeit und Vielfachheit läßt bereits erkennen der

Satz 7. *Hat die endliche inseparable Erweiterung $L|K$ die Vielfachheit m, so sind je m diese Erweiterung erzeugende Elemente p-unabhängig in L.*

Wäre nämlich in $L = K(a_1, \ldots, a_m)$ etwa a_m p-abhängig von den $a_1, \ldots, a_{m-1}$, so müßte $a_m \varepsilon K(a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m^p)$ sein. Damit hätte a_m bez. $K(a_1, \ldots, a_{m-1})$ den gleichen Grad wie a_m^p, wäre also [14, S. 232] separabel über diesem Körper. Da wegen der Inseparabilität von $L|K$ bei unserer Annahme $m - 1 \geqq 1$ sein müßte, würde sich also nach Satz 5 eine Erzeugung durch $m - 1$ Elemente im Widerspruch zur Bedeutung von m ergeben. Aus diesem Beweis folgt übrigens noch über die Behauptung von Satz 7 hinaus, daß in dem bei MACLANE [8] erklärten, auf TEICHMÜLLER zurückgehenden Sinn die $a_1, \ldots, a_m$ sogar schon in $L|K$ (oder „relativ zu K") p-unabhängig sind, d. h. kein a_i p-abhängig ist von den andern und einer p-Basis für K. Danach ist wegen $L = L^p(K, a_1, \ldots, a_m)$ die Menge $\{a_1, \ldots, a_m\}$ relative p-Basis von $L|K$ [15, S. 370], also in Übereinstimmung mit einem den Spezialfall rein-inseparabler Erweiterungen behandelnden Satz von BECKER und MACLANE [1, Theorem 6] die Vielfachheit m zugleich der relative Unvollkommenheitsgrad [15, S. 370] von $L|K$: $(L : L^p(K)) = p^m$. Allgemein heißt eine Erweiterung vom relativen Unvollkommenheitsgrad 0, also mit $L = L^p(K)$, *relativ vollkommen*.

Zur Frage des Verhaltens p-unabhängiger Elemente bei Übergang zu einem Erweiterungskörper hat TEICHMÜLLER gezeigt [15, S. 369], daß eine p-unabhängige Menge auch in einem separablen Oberkörper p-unabhängig bleibt, ja sogar eine p-Basis auch p-Basis jeder separablen Erweiterung ist, so daß der Uvg unverändert bleibt. Erwähnt sei noch, daß deswegen für eine separable Erweiterung $S|K$ immer $S^p(K) = S$ gilt und daher bei Einbeziehung der separablen Erweiterungen an die Stelle der oben für inseparable Erweiterungen bewiesenen Gleichheit von Vielfachheit und relativem Unvollkommenheitsgrad die Übereinstimmung von Inseparabilitätsrang und relativem Unvollkommenheitsgrad tritt. Das Erhaltenbleiben der p-Basis ist nun, wie bereits MACLANE [8, Theorem 8] nachgewiesen hat, sogar charakteristisch für die separablen unter den algebraischen Erweiterungen; denn es gilt

Satz 8. *Eine p-Basis bleibt bei keiner inseparablen Erweiterung p-unabhängig.*

Ist $L|K$ nämlich inseparabel, so gibt es ein $a \varepsilon L$ mit dem Exponenten 1. Mit Z als m. s. Zk. ist dann eine p-Basis B von K auch p-Basis von Z, also etwa a^p p-abhängig von $b, b_1, \ldots, b_n \varepsilon B$ aber p-unabhängig von $b_1, \ldots, b_n$. Nach Abhängigkeitsaxiom III ist also b in Z von $a^p, b_1, \ldots, b_n$ p-abhängig, d. h. aber b von $b_1, \ldots, b_n$ in $Z(a)$ und damit erst recht in L.

Die Konstruktion einer p-Basis einer rein-inseparablen Erweiterung aus einer p-Basis des Grundkörpers ermöglicht nun

Satz 9. *Ist $\{a\} + M$ in K p-unabhängig, so ist in $K(a^{p^{-e}})$ $(e = 1, 2, \ldots)$ auch $\{a^{p^{-e}}\} + M$ p-unabhängig.*

Der Schluß von e auf $e+1$ reduziert sich für diese Behauptung offenbar auf den Fall $e = 1$. Es genügt daher, den Beweis für diesen zu führen. Nach Voraussetzung ist a in K nicht p-abhängig von der Nullmenge. $a' = a^{p^{-1}}$ liegt also, wenn $K(a') = L$ gesetzt wird, nicht in $L^p(M) = K^p(a, M) \subset K$, d. h. a' ist in L p-unabhängig von M. Mit $M = \{b\} + M'$ liegt weiter b nicht in $K^p(M', a) = L^p(M')$. M ist daher p-unabhängig in L. Nach allgemeinen Abhängigkeitssätzen gilt das selbe für $\{a'\} + M$. Eine Art Umkehrung von Satz 9 ist

Satz 10. *Ist $K(a)$ rein-inseparabel vom Exponenten e bez. K und $M \subseteq K$ p-unabhängig in $K(a)$, so ist a^{p^e} in K p-unabhängig von M.*

Wir beweisen die Behauptung zuerst für $e = 1$. Wäre sie falsch, so gäbe es, da a^p nicht in K^p liegt, ein $b \varepsilon M$ und ein $M' \subset M$ so, daß a^p p-abhängig in K von $\{b\} + M'$, aber p-unabhängig von M' wäre. Daraus folgt aber die p-Abhängigkeit des b von $\{a^p\} + M'$, d. h. $b \varepsilon K^p(a^p, M')$. Das jedoch bedeutet im Widerspruch zur Voraussetzung die p-Abhängigkeit in $K(a)$ des Elementes b von M'. Ist die Behauptung ferner für $e - 1$ $(e > 1)$ richtig, so gelten die Voraussetzungen unseres Satzes nach dem für $e = 1$ Bewiesenen auch noch für die Erweiterung $K(a^p)|K$ vom Exponenten $e - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist daher die Behauptung auch für e richtig und somit durch vollständige Induktion allgemein bewiesen.

Aus Satz 9 folgt nun [10, S. 222] zusammen mit dem oben erwähnten Ergebnis von Teichmüller über separable Erweiterungen

Satz 11. *Bei endlichem $L|K$ ist*

$$\mathrm{Uvg}(L) = \mathrm{Uvg}(K).$$

Für endlichen $\mathrm{Uvg}(K)$ gaben Becker und MacLane [1] einen auf der Gleichung

$$(K : K^p) = p^{\mathrm{Uvg}(K)} \tag{7}$$

beruhenden einfacheren Beweis an. Aus Satz 7 und Satz 11 folgt sofort

Satz 12. *Die Vielfachheit einer endlichen inseparablen Erweiterung ist nicht größer als der Unvollkommenheitsgrad des Grundkörpers.*

Eine einfachere Herleitung dieses zuerst vom Verfasser a. a. O. in anderem Zusammenhang bewiesenen Satzes benutzt nach Becker-MacLane [1] die Tatsache, daß wegen (6) ein endlicher rein-inseparabler Oberkörper von K durch seine p-Basis B als $K(B)$ gegeben ist.

Nach Satz 12 sind also die Körper mit $\mathrm{Uvg}(K) \leqq 1$ stets im Sinne von Krull [6, S. 320] *fastvollkommen*, d. h. jede endliche Erweiterung von ihnen ist einfach. Dieses Ergebnis und zwar mit der Verschärfung, daß $\mathrm{Uvg}(K) \leqq 1$ für fastvollkommenes K charakteristisch ist, läßt sich unter Benutzung von (7) aus einem Satz von Steinitz [14, S. 244] entnehmen. Die Verschärfung ergibt sich auch sehr leicht aus der Tatsache, daß nach der Definition der p-Unabhängigkeit für p-unabhängige $a_1, \ldots, a_n$ $(K(a_1^{p^{-1}}, \ldots, a_n^{p^{-1}}) : K) = p^n$ ist, also diese Erweiterung die Vielfachheit n besitzen muß. Diese Betrachtungen sowohl wie Satz 12 werden im nächsten Paragraphen zum Satz 17 erweitert. Für die fastvollkommenen Körper gilt in Verallgemeinerung eines auf eine Bemerkung von F. K. Schmidt zurückgehenden Hilfssatzes bei Deuring [4, S. 165]

Satz 13. *Eine algebraische Erweiterung L vom Exponenten e des fastvollkommenen Körpers K hat den m. s. Zk. L^{p^e}.*

Nach Teichmüller [15, S. 371] ist nämlich $Z^{p^{-e}}$ die einzige rein-inseparable Erweiterung vom Exponenten e des ja ebenfalls fastvollkommenen m. s. Zk. Z. Als Folgerung von Satz 13 merken wir noch an, daß es zu jeder algebraischen Erweiterung L eines fastvollkommenen Körpers K einen Zwischenkörper S der in Satz 3 erwähnten Art gibt: Besitzt nämlich L einen Exponenten e, so ist mit $L^{p^e} | K$ auch $L | K^{p^{-e}}$ separabel, also $S = K^{p^{-e}}$. Hat die Erweiterung aber keinen Exponenten, so gilt $K^{p^{-e}} \subseteq L$ für jedes $e = 1, 2, \ldots$: L enthält den kleinsten vollkommenen Oberkörper von K, der $= S$ ist, weil L über ihm separabel sein muß.

§ 3.

Normalform mehrfacher, rein-inseparabler Erweiterungen.

Für endliche, rein inseparable Erweiterungen gilt der im Wesentlichen schon in [10, S. 220] formulierte und bewiesene

Satz 14. *Je m Erzeugende einer rein-inseparablen Erweiterung $L | K$ der Vielfachheit m lassen sich so als $a_1, \ldots, a_m$ bezeichnen, daß mit $i = 1, \ldots, m$ die Bedingungen*

$$\text{I.} \quad a_i^{q_i} = \alpha_i \varepsilon K(a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i}) \quad (q_i = p^{e_i},\ e_i > 0)$$

$$\text{II.} \quad a_i^{p^{-1}} \text{ nicht in } K(a_1, \ldots, a_{i-1})$$

$$\text{III.} \quad e_1 \geqq e_2 \geqq \ldots \geqq e_m$$

erfüllt sind. Gelten umgekehrt für eine Erzeugung $L = K(a_1, \ldots, a_m)$ *die Bedingungen I und II, so lassen sich die* a_i *so umordnen, daß mit denselben* e_i *neben I und II auch Bedingung III erfüllt ist. Die* $e_1, \ldots, e_m$ *sind dabei Invarianten der Erweiterung* $L \mid K$, *und* m *ist die Vielfachheit dieser Erweiterung. I—III sind gleichbedeutend damit, daß für* $i = 1, \ldots, m$ *der Körper* L *bez.* $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ *denselben von Null verschiedenen Exponenten besitzt wie das Element* a_i. *Bedingung II kann ersetzt werden durch*

II'. α_i *in* $K(a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i})$ *von den* $a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i}$ *p-unabhängig.*

Zum Beweis beachten wir, daß auf Grund von I—III e_i der Exponent von $L \mid K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ ist. Also wird die im ersten Teil des Satzes geforderte Numerierung so durchzuführen sein, daß a_i bezüglich $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ keinen kleineren Exponenten besitzt als die $a_{i+1}, \ldots, a_m$. Dann sind II und III erfüllt; ebenso $e_i > 0$, da aus $e_m = 0$

$$L = K(a_1, \ldots, a_{m-1})$$

folgen würde. Den noch fehlenden Nachweis von I erbringt man wesentlich kürzer als a. a. O. folgendermaßen: Nach Einführung der Abkürzungen $K' = K(a_1, \ldots, a_{k-1})$, $K'' = K'(a_k^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i})$, $q = q_k/q_i$ genügt es offenbar zu zeigen, daß für $k = 1, \ldots, i-1$ aus $\alpha_i = a_i^{q_i} \varepsilon K''(a_k)$ stets $\alpha_i \varepsilon K''$ folgt. $\alpha_i \varepsilon K''(a_k)$ bedeutet aber $\alpha_i = \sum_{h=0}^{q_i - 1} A_h a_k^h$ mit $A_h \varepsilon K''$. Daraus folgt $a_i^{q_k} = \sum_{h=0}^{q_i - 1} A_h^q (a_k^q)^h$. Da nach Voraussetzung die $a_{k+1}, \ldots, a_i$ bez. K' keinen größeren Exponenten haben als a_k, liegen $a_i^{q_k}$ und die A_h^q in K'. a_k^q hat aber bez. K' den Grad q_i. Somit ist $A_h = 0$ für $h > 0$, also $\alpha_i \varepsilon K''$, w. z. b. w. Damit haben wir zugleich bewiesen, daß I—III gleichbedeutend sind mit „L hat bez. $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ denselben von Null verschiedenen Exponenten wie $a_i (i = 1, \ldots, m)$“. Sind nun weiter in einer Erzeugung $L = K(a_1, \ldots, a_m)$ I und II erfüllt, so zeigen wir durch vollständige Induktion nach m, daß durch Umordnen auch III erfüllt werden kann. Für $m = 1$ ist nichts zu beweisen. Es sei $m > 1$ und e_r nicht größer als jedes andere e_i. Dann erfüllt auch $L' = K(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots, a_m)$ die Bedingung II trivialerweise und Bedingung I, weil für $i \geqq r+1$ ja

$$\alpha_i \varepsilon K(a_1^{q_i}, \ldots, (a_r^{q_r})^{q_i/q_r}, \ldots, a_{i-1}^{q_i}) = K(a_1^{q_i}, \ldots, a_{r-1}^{q_i}, a_{r+1}^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i})$$

gilt. Also gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Umordnung $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}$ mit $\bar{e}_1 \geqq \ldots \geqq \bar{e}_{m-1}$. $L = L'(a_r)$ hat nun über L' den Grad $(L : K)/(L' : K) = p^{\Sigma e_i - \Sigma \bar{e}_i} = q_r$. Wegen $a_r^{q_r} = \alpha_r \varepsilon L'$ gilt daher $a_r^{p-1} \varepsilon K(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1})$. Setzen wir also $a_r = \bar{a}_m$, so sind die Bedingungen I—III auch für $L = K(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$ erfüllt. Die Invarianz der e_i und damit auch ihrer Anzahl m, d. h. die Unabhängigkeit dieser

Zahlen von der Wahl der Erzeugenden bei Erfüllung von I—III, folgt nun nach den Entwicklungen a. a. O. S. 229, 230 daraus, daß mit M als Zerfällungskörper von $L|K$ die e_i sich aus gewissen Strukturinvarianten der primären Algebra L_M über dem Grundkörper M berechnen lassen. In § 5 werden wir von allgemeinerer Fragestellung aus auf diese Zusammenhänge näher eingehen. Auf Grund des ersten Teils unseres Satzes ist damit m als die Vielfachheit von $L|K$ erkannt. Schließlich folgt aus II: α_i nicht in $K^p(a_1^p, \ldots, a_{i-1}^p)$, also erst recht nicht in $K^p(a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i})$, d. h. aber II'. Ist nun II' erfüllt, so sind für $i = 2, \ldots, m$ die $a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i}$ in $K^{(i)} = K(a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i})$ p-unabhängig. Ist nämlich diese für $i = 2$ sofort einzusehende Behauptung für $i = n < m$ richtig, so folgt aus II' die p-Unabhängigkeit der $a_1^{q_n}, \ldots, a_{n-1}^{q_n}$, α_n in $K^{(n)}$. Mehrfache Anwendung von Satz 9 ergibt daraus die p-Unabhängigkeit der $a_1^{q_{n+1}}, \ldots, a_n^{q_{n+1}}$ in $K^{(n+1)}$. Wieder mittels Satz 9 folgt aus der somit bewiesenen p-Unabhängigkeit der $a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i}$, α_i in $K^{(i)}$ die p-Unabhängigkeit der $a_1, \ldots, a_{i-1}$, α_i in $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$. Darin ist aber Bedingung II enthalten.

Eine den Bedingungen I—III genügende Erzeugung soll im Folgenden *ausgezeichnet* genannt werden. Haben wir also eine ausgezeichnete Erzeugung aufgefunden, so kennen wir auch die Vielfachheit der Erweiterung. Wir können so zeigen

Satz 15. *Ein Zwischenkörper der endlichen Erweiterung $L|K$ hat bez. K dieselbe Vielfachheit wie der ihm entsprechend Satz 4 zugeordnete Oberkörper des m. s. Zk. Z von $L|K$.*

Für einen separablen Zwischenkörper $L' = Z'$ ist dies wegen $L^* = Z$ trivial. Im anderen Fall wählen wir eine ausgezeichnete Erzeugung $L' = Z'(a_1, \ldots, a_m)$. $L^* = Z(a_1, \ldots, a_m)$ erfüllt nun I und III trivialerweise und II wegen Satz 1. Also ist $m > 1$ auch die Vielfachheit von $L^*|Z$ und damit von $L^*|K$. Aus diesem Satz und Satz 6 erhalten wir sofort das Ergebnis von Steinitz [14, S. 243], daß alle Zwischenkörper einer einfachen algebraischen Erweiterung einfach sind. Der hier durchgeführte Beweis erscheint dem Steinitzschen gegenüber als unnötige Komplizierung, läßt sich dafür aber auf mehrfache Erweiterungen verallgemeinern (s. § 5, Satz 28).

Satz 14 umfaßt nebenbei auch die Charakterisierung der einfachen unter den endlichen Erweiterungen durch die Gleichheit der in (4) auftretenden Größen e und f [14, S. 242]: Die $e_1, \ldots, e_m$ von L bez. des m. s. Zk. — kurz als die *Exponenten* von $L|K$ bezeichnet (im separablen Fall ist ihre Anzahl, der Inseparabilitätsrang $m = 0$) — ergeben $e = e_1$, $f = \sum_1^m e_i$, wenn wie üblich ein „leerer Summenausdruck" als Null festgesetzt wird; $e = f$ ist also tatsächlich mit $m \leqq 1$, dem Ausdruck für die Einfachheit von $L|K$ äquivalent. Schließlich ergibt sich aus dem Beweis von Satz 14 noch

Satz 16. *Die endliche Erweiterung L von K ist über einem Zwischenkörper M, der bez. K den gleichen Exponenten besitzt wie L, von kleinerer Vielfachheit als über K.*

Wegen Satz 15 können wir uns nämlich auf rein-inseparable Erweiterungen $L|K$ beschränken und dann eine ausgezeichnete Erzeugung von $L|K$ mit dem ersten Element einer ausgezeichneten Erzeugung von $M|K$ beginnen, womit bereits die Behauptung bewiesen ist.

Die aus II′ und Satz 11 folgende in [10, S. 222 unten] angegebene Konstruktionsanweisung für ausgezeichnete Erzeugungen liefert zusammen mit Satz 12

Satz 17. *Notwendig und hinreichend dafür, daß es über K eine Erweiterung mit den Exponenten $e_1, \ldots, e_m$ gibt, ist*

$$m \leqq \mathrm{Uvg}(K).$$

Zu jeder solchen Erweiterung und jedem m' mit

$$m < m' \leqq \mathrm{Uvg}(K)$$

gibt es einen Oberkörper der Vielfachheit m' bez. K.

Die einfachsten ausgezeichneten Erzeugungen werden nun im Falle $\alpha_i \varepsilon K$ geliefert. Nach eindeutiger Festlegung der $\bar{e}_i$ und $\bar{\alpha}_i$ durch

$$\alpha_i^{p^{\bar{e}_i}} = \bar{\alpha}_i \varepsilon K - K^p$$

können wir über das Auftreten dieses Falles Folgendes sagen:

Satz 18. *$\alpha_i \varepsilon K (i = 1, \ldots, m)$ ist gleichbedeutend mit der p-Unabhängigkeit der $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m$ in K. In diesem Fall ersetzt die p-Unabhängigkeit der $\alpha_i = \bar{\alpha}_i (i = 1, \ldots, m)$ in K die Bedingungen I und II.*

Ist nämlich $\alpha_i \varepsilon K$, also $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$, so gibt es, da wegen Satz 7 die $a_1, \ldots, a_m$ in $K(a_1, \ldots, a_m)$ p-unabhängig, ein minimales $n \leqq m$ so, daß die $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m$ in $K(a_1, \ldots, a_n)$ p-unabhängig sind. Bei $n > 0$ wären nun nach Satz 10 und der Bedeutung von α_n auch die $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots, a_m$ in $K(a_1, \ldots, a_{n-1})$ p-unabhängig im Widerspruch zur Definition von n. Sind umgekehrt die $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_i$ p-unabhängig, so folgt daraus durch mehrfache Anwendung von Satz 9 die p-Unabhängigkeit des $\bar{\alpha}_i$ von den $a_1, \ldots, a_{i-1}$ in $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$. Also erfüllen die $\bar{\alpha}_i$ mit den $\bar{e}_i$ die Bedingungen einer ausgezeichneten Erzeugung, weshalb $\bar{\alpha}_i = \alpha_i \varepsilon K$ gilt.

Der in Satz 18 behandelte Fall liegt wegen I insbesondere dann vor, wenn $e_1 = \cdots = e_m = e$ ist. Hat bei endlichem $\mathrm{Uvg}(K)$ dann noch m den maximalen Wert $\mathrm{Uvg}(K)$, so ergeben sich wegen (6) genau die Erweiterungen mit dem Exponenten e, für die die Behauptung von Satz 13 zutrifft. Die weitergehende Frage, wann eine Erweiterung $L|K$ einen Zwischenkörper $K' = K^{p^{-e}}$ besitzt, ist wegen (6) und des Erhaltenbleibens der p-Basis bei separablen Erweiterungen gleichbedeutend damit, wann die p^e-te Wurzel des m. s. Zk. selbst

Zwischenkörper ist. O. B. d. A. können wir also $L|K$ als rein-inseparabel annehmen. Ist nun $e < e_i$, so liegt mit der Abkürzung $p^{e_i - e} = q_i'$ die q_i'-te Potenz von a_i in $K'(a_1^{q_i'}, \ldots, a_{i-1}^{q_i'})$ aber nicht in $K'(a_1, \ldots, a_{i-1})^p$, da dies im Widerspruch zu II $a_i^{p^{-1}} \varepsilon K(a_1^{p^e}, \ldots, a_{i-1}^{p^e})$ bedeuten würde. Für $e \geqq e_i$ dagegen liegt a_i bereits in $K'(a_1, \ldots, a_{i-1})$, so daß das Kompositum LK' über K' die Exponenten $e_1 - e, \ldots, e_r - e$ besitzt, wenn r die Anzahl der $e_i > e$ bedeutet. Die für $K' \leqq L$ notwendige und hinreichende Bedingung $LK' = L$, also $(LK' : K) = (L : K)$, schreibt sich daher $(e \,.\, \mathrm{Uvg}(K) - r) = e_{r+1} + \cdots + e_m$. Diese ist dann und nur dann erfüllt, wenn $m = \mathrm{Uvg}(K)$ und $e_{r+1} = \cdots = e_m = e$ ist. Also gilt

Satz 19. *Nur in inseparablen Erweiterungen, deren Vielfachheit m mit dem Uvg des Grundkörpers übereinstimmt, sind alle p-ten Wurzeln des Grundkörpers enthalten, und zwar alle p^{e_m}-ten, jedoch nicht alle p^{e_m+1}-ten Wurzeln. Über dem Körper dieser Wurzeln besitzt die Erweiterung einen Inseparabilitätsrang $< m$.*

Damit haben wir zugleich eine Charakterisierung des kleinsten Exponenten für den Fall maximaler Vielfachheit ohne Bezugnahme auf eine spezielle ausgezeichnete Erzeugung gewonnen.

§ 4.

Kompositum und Grundkörpererweiterung.

In der Galoisschen Theorie werden bekanntlich nicht nur die Zwischenkörper M einer normalen Erweiterung $L|K$ untersucht, sondern auch über den beliebigen Erweiterungen M von K die Komposita LM. Die Angabe des gemeinsamen Oberkörpers von L und M, in dem jeweils das Kompositum, also der kleinste gemeinsame Oberkörper gebildet werden soll, erübrigt sich dabei, weil ja (auch bei inseparablen Erweiterungen) wegen der Normalität von $L|K$ der Erweiterungstypus $LM|M$ eindeutig bestimmt ist. Die Galoissche Theorie ermöglicht nun die Zurückführung der Frage nach der Struktur von $LM|M$ auf die nach der Struktur von L über dem Durchschnitt D von L und M, der ja als Unterkörper von M bereits ohne Angabe eines gemeinsamen Oberkörpers von L und M eindeutig bestimmt ist. Gerade weil nun im inseparablen Falle die Galoissche Theorie nicht in vollem Umfang zur Verfügung steht, wird vermutlich die Untersuchung von $LM|M$ einen wesentlichen Beitrag zur Strukturfrage inseparabler Erweiterungen liefern.

Wie Krull [6, S. 334] bemerkt, bleibt bei einfachem, normalem $L|K$ die Gradgleichung der Galoisschen Theorie

$$(LM : M) = (L : D) \tag{8}$$

bestehen, ist also bei fastvollkommenem K und normalem $L|K$ all-

gemein erfüllt. Ferner ist (8) bei normalem $L\,K$ und separablem $M|K$ erfüllt, was sich ergibt, wenn man den m. s. Zk. Z von $L|K$ verwendet und Satz 2 beachtet (Fig. 3). Aber schon für nichtseparable, einfache Erweiterungen und $\mathrm{Uvg}(K)=2$ gibt es ein Gegenbeispiel: Für M nehmen wir die in dem Gegenbeispiel zu Satz 3 verwandte Erweiterung $K(a)$ und wählen $L=K^{p^{-1}}$; dann ist $D=K$ aber $(LM):M=p$. Das von Krull [6, S. 334] angegebene Gegenbeispiel benötigt einen Grundkörper vom Uvg 3. — Setzen wir neben $L|K$ noch $M|K$ als normal voraus, so gilt (8) auch noch allgemein bei $\mathrm{Uvg}(K)=2$, wie sofort zu erkennen ist aus

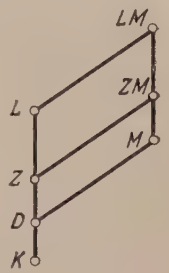

Fig. 3.

Satz 20. *Über dem Durchschnitt zweier in einem gemeinsamen Oberkörper liegender endlicher Erweiterungen des unvollkommenen Körpers K hat eine von beiden einen Inseparabilitätsrang* $<\mathrm{Uvg}(K)$.

Nichttrivial ist die Behauptung nur, wenn $L|K$ und $M|K$ beide den Inseparabilitätsrang $\mathrm{Uvg}(K)$ haben. Ist dann o. B. d. A. der letzte Exponent e von $L\,K$ nicht größer als der letzte Exponent von $M|K$, so liegt nach Satz 19 $K^{p^{-e}}$ im Durchschnitt D von L und K, und L hat über $K^{p^{-e}}$ und damit auch über D einen Inseparabilitätsrang $<\mathrm{Uvg}(K)$. Das Gegenstück zu Satz 20 bildet in Verallgemeinerung einer bei Deuring [4, S. 165] bewiesenen Tatsache der

Satz 21. *Ein Kompositum zweier endlicher Erweiterungen des unvollkommenen Körpers K hat über mindestens einer von ihnen einen Inseparabilitätsrang* $<\mathrm{Uvg}(K)$.

Denn sonst lägen nach Satz 19 beide Erweiterungen in der p-ten Potenz des Kompositums, die nach Satz 11 aber echter Unterkörper ist.

Zu unserer Frage nach der Gültigkeit von (8) zurückkehrend geben wir noch ein Gegenbeispiel mit normalem $L|K$ und $M|K$ aber $\mathrm{Uvg}(K)=3$: $K=P_p(u,v,w)$ mit u,v,w als über P_p algebraisch unabhängigen Transzendenten, $L=K(u^{p^{-1}},v^{p^{-1}})$, $M=K(w^{p^{-1}},(uw+v)^{p^{-1}})$; allgemeiner können aber auch für K irgend ein Körper mit $\mathrm{Uvg}(K)\geqq 3$ und für u,v,w irgend drei p-unabhängige seiner Elemente gewählt werden. Ist nämlich

$$a=\sum_{i,k=0}^{p-1}\alpha_{ik}\,w^{i/p}\,(uw+v)^{k/p},\quad \alpha_{ik}\,\varepsilon\,K$$

ein Element von M, so erhalten wir mit

$$A_n=\sum_{\substack{0\leq i\leq \mathrm{Min}(n,\,p-1)\\ n-i\leq k\leq p-1}}\alpha_{ik}^{p}\binom{k}{n-i}\,u^{n-i}\,v^{i+k-n}\qquad (9)$$

$$(n=0,1,\ldots,2p-2)$$

$$a^p=\sum_{n=0}^{2p-2}A_n\,w^n=\sum_{n=0}^{p-2}(A_n+w^p\,A_{n+p})\,w^n+A_{p-1}\,w^{p-1}.$$

Für $a \varepsilon L$ sind also notwendig und hinreichend die Gleichungen

$$A_n + w^p A_{n+p} = 0 \qquad (n = 1, \ldots, p-2) \tag{10}$$

$$A_{p-1} = 0. \tag{11}$$

Ist nun s die kleinste Zahl mit $\alpha_{ik} = 0$ für $i + k > s$, so folgt aus (9) $A_n = 0$ für $n > s$. Aus (11) und (9) erkennen wir $s < p - 1$ wegen der p-Unabhängigkeit von u, v. Wäre nun $s > 0$, so ergäbe (10) $A_s = 0$, d. h. nach (9) $\sum_{i=0}^{s} \alpha_{i,\,s-i}^{p} u^{s-i} = 0$. Da u nicht in K^p liegt, wäre also $\alpha_{ik} = 0$ für $i + k = s$ im Widerspruch zur Definition von s. Daher ist $D = K$, während $(LM : M) = p$ gilt.

Daraus, daß (8) nicht immer gilt, lassen sich schon die Schwierigkeiten vermuten, die bei inseparablen Erweiterungen auftreten. Insbesondere ist eine Unterscheidung von „natürlichen" und „akzessorischen Irrationalitäten" nicht mehr sinnvoll. Um näheren Einblick zu gewinnen, gehen wir aus von der Beziehung, die bei einer separablen, nicht notwendig normalen Erweiterung $L \mid K$ besteht zwischen der Kompositumbildung aus L und M und der Grundkörpererweiterung $L_M = M_L$, d. h. der Bildung des direkten Produkts $L \times M$ der als Algebren über K aufgefaßten Körper L und M [3, S. 6—7]: L_M ist direkte Summe aus Oberkörpern von K, die gerade alle möglichen Komposita von L und M darstellen. Im Gegensatz hierzu gilt

Satz 22. *Bei endlicher, rein-inseparabler Erweiterung $L \mid K$ und beliebiger Erweiterung $M \mid K$ ist L_M eine primäre Algebra, deren Radikalrestklassenkörper mit LM relativ zu M isomorph ist.*

Zum Beweis benutzen wir eine Basis $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von $L \mid K$ und die mit derselben Multiplikationsvorschrift versehene Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $L_M \mid M$. Mit e als Exponenten von $L \mid K$ und $p^e = q$ ist also insbesondere $a_i^q = b_i^q \varepsilon K$. Durch $\sum \alpha_i b_i \to \sum \alpha_i a_i$ $(\alpha_i \varepsilon M)$ wird nun ein Homomorphismus von L_M auf LM hergestellt, bei dem die Elemente von M fest bleiben. Für die Elemente des Ideals $\mathfrak{n}$ von L_M mit $L_M/\mathfrak{n} \cong LM$ verschwindet also die q-te Potenz, da sie in M liegt. Deshalb ist $\mathfrak{n}$ im Radikal $\mathfrak{w}$ von L_M enthalten und, da der Restklassenring nach $\mathfrak{n}$ ein Körper ist, sogar $= \mathfrak{w}$. Ersetzt man wie üblich die Restklassen von Grundkörperelementen nach einem Ideal einer Algebra durch die Elemente selbst, so handelt es sich bei $L_M/\mathfrak{w} \cong LM$, wonach L_M primär ist [3, S. 17], um einen Isomorphismus relativ zu M.

Mit Hilfe des m. s. Zk. S läßt sich jetzt auch die Struktur von L_M bei beliebigem endlichen L in ihrem Zusammenhang mit den möglichen Kompositumbildungen beschreiben: Wir haben einmal

$$M_S = M' \dotplus \cdots \dotplus M^{(s)},$$

worin die $M^{(i)}$ als Oberkörper von S aufgefaßt seien. Anwendung von Satz 22 ergibt dann wegen $L_{M^{(i)}} = M_L^{(i)}$

$$L_M = M'_L \dotplus \cdots \dotplus M_L^{(s)}$$

als direkte Summe primärer Algebren, deren Radikalrestklassenkörper gerade alle möglichen Komposita von L und M erschöpfen. Diese Komposita können unter Verwendung des in $M^{(i)}$ liegenden Körpers $\varepsilon_i M = M_i \cong M(\sum \varepsilon_i = 1$, ε_i in $M^{(i)})$ als $L M_i$ geschrieben werden (Fig. 4). Mit T_i als m. s. Zk. von $M_i | K$ ist nach Satz 2 eine Basis von $M_i | T_i$ auch eine Basis von $M^{(i)}$ über dem m. s. Zk. $K^{(i)} = T_i S$ von $M^{(i)} | S$. Ebenso ist eine Basis von $L | S$ auch eine solche des Körpers $L^{(i)} = K_L^{(i)}$ über $K^{(i)}$. Die Bildung des direkten Produkts zweier durch die rein-inseparablen Anteile von $L | K$ und $M | K$ gegebener Algebren über $K^{(i)}$ führt also zu

$$M_L^{(i)} = M^{(i)} \times L^{(i)}$$

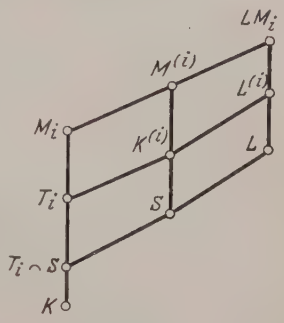

Fig. 4.

und zu $L M_i = M^{(i)} L^{(i)}$ als Radikalrestklassenkörper. Wir können uns daher im Folgenden auf rein-inseparable Erweiterungen $L | K$, $M | K$ beschränken.

Bevor wir nun im nächsten Paragraphen daran gehen, aus der Betrachtung von L_M Strukturinvarianten unserer rein-inseparablen Erweiterungen zu gewinnen, wollen wir die im vorigen Paragraphen angegebene ausgezeichnete Erzeugung von $L | K$ für diese Aufgabe zweckmäßig spezialisieren.

Satz 23. *Es gibt eine ausgezeichnete Erzeugung*

$$L = K(a_1, \ldots, a_m),$$

so daß $M(a_1, \ldots, a_m)$ *mit* $m' \leqq m$ *eine ausgezeichnete Erzeugung von* $L M | M$ *ist.*

Hierzu führen wir folgende Bezeichnungen ein (Fig. 5):

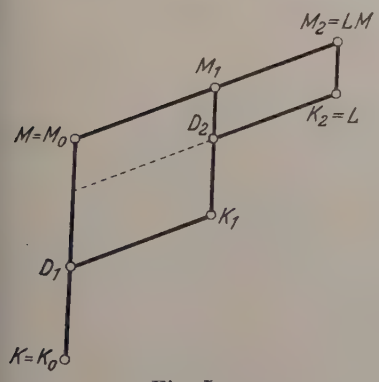

Fig. 5.

$$K_i = K(a_1, \ldots, a_i), \quad K_0 = K$$
$$M_i = M K_i = M(a_1, \ldots, a_i)$$
$$D_i = M_{i-1} \cap K_i$$
$$(K_i : D_i) = q_i' = p^{e_i'}$$
$$(D_i : K_{i-1}) = \bar{q}_i = \bar{p}^{e_i}, \text{ also } q_i' \cdot \bar{q}_i = q_i.$$

Nach dem oben über die Gültigkeit von (8) Gesagten ist dann auch $(M_i : M_{i-1}) = q_i'$. Auf Grund des Beweisganges von Satz 14 genügt es, die $a_1, \ldots, a_m$ so zu bestimmen, daß die Exponenten von a_i und L bez. K_{i-1} sowie die Exponenten von a_i und $L M$ bez. M_{i-1} jeweils übereinstimmen. Es sei die Wahl der a_i in Übereinstimmung mit dieser Vorschrift bis $i = n - 1$ bereits erfolgt, was also für $n = 1$ bedeutet, daß noch kein a_i bestimmt ist. Dann wird ein $b \varepsilon L$ gewählt,

das bez. K_{n-1} denselben Exponenten hat wie L, und ein $c \varepsilon L$, dessen Exponent bez. M_{n-1} gleich dem von $LM|M_{n-1}$ ist. Hat nun b einen kleineren Exponenten bez. M_{n-1}, so stimmen für beliebiges $\xi \neq 0$ aus K die Exponenten bez. M_{n-1} der Elemente c und $b + \xi c$ überein. Die Forderung, $b + \xi c$ solle einen kleineren Exponenten bez. K_{n-1} als b haben, drückt sich in algebraischen Gleichungen für ξ aus, deren Koeffizienten wegen des Nichterfülltseins dieser Forderung für $\xi = 0$ nicht alle verschwinden. Da K als unvollkommener Körper unendlich viele Elemente enthält, gibt es also ein $\xi = \alpha \neq 0$ so, daß $b + \alpha c$ bez. K_{n-1} denselben Exponenten hat wie b. Somit erfüllt entweder die Festsetzung $a_n = b$ oder $a_n = b + \alpha c$ unsere Forderung auch für $i = n$. Dadurch ist eine Konstruktionsvorschrift für eine ausgezeichnete Erzeugung der verlangten Art angegeben. In einer solchen gilt für die Invarianten q_i'

$$q_1' \geqq q_2' \geqq \ldots \geqq q_{m'}' > q_{m'+1}' = \cdots = q_m' = 1.$$

Die $\bar{q}_i$ sind zwar ebenfalls Invarianten, jedoch i. a. nicht der Größe nach geordnet. Eine Folgerung aus Satz 23 sei noch besonders formuliert:

Satz 24. *Die Exponenten von $LM|M$ sind nicht größer als die gleichbezifferten Exponenten von $L|K$.*

Trivial ist diese Aussage ja nur für den ersten Exponenten, da nur dieser nichtrekursiv und ohne Verwendung der a_i definiert ist.

Bei den bisherigen Entwicklungen konnte $M|K$ noch als beliebige algebraische Erweiterung angenommen werden. Erst im nächsten Paragraphen, wo wir die Beziehung $L_M = M_L$ ausnutzen, also die Rollen von L und M vertauschen werden, wird die oben als möglich erkannte Beschränkung auf rein-inseparable, endliche $M|K$ notwendig werden. Ist dann speziell M K einfach, so ist mit $M_k \cap D_i = D_i^{(i-k-1)}$ (für $k < i$) nach dem über die Gültigkeit von (8) Gesagten

$$D_i^{(h)} = D_i^{(h+1)} K_{i-h-1} \quad (h = 0, \ldots, i-2),$$

woraus durch fortgesetzte Anwendung die Beziehung $D_i = D_i^{(i-1)} K_{i-1}$ entsteht. In Fig. 5 kann also die gestrichelte Linie ausgezogen werden. Daß dieser Übergang zu dem aus der Galoisschen Theorie der separablen Erweiterungen bekannten einfacheren Schema i. a. nicht ausgeführt werden kann, ergibt sich aus den zu (8) konstruierten Gegenbeispielen. Zum Nachweis, daß selbst bei einfachem $M|K$ mehr als ein $\bar{q} > 1$ sein kann, d. h. tatsächlich verschiedene $D_i^{(i-1)} \supset K$ auftreten können, sei mit $K = P_p(u, v)$ $M = K((u + v^p)^{p^{-2}})$, $K_1 = K(u^{p^{-2}})$ und $L = K_2 = K_1(v^{p^{-1}})$ gebildet. Dann ist $D_1 = K(u^{p^{-1}})$, $D_2 = L = LM$, $D_2' = M$ also $\bar{q}_2 = \bar{q}_1 = p$. Dieses Beispiel zeigt zugleich, daß — obwohl bei $M \subseteq L$ immer $\prod_{i=1}^{m} \bar{q}_i = (M : K)$ ist — durchaus nicht die von 0 verschiedenen $\bar{e}_i$ die Exponenten von $M|K$ zu sein brauchen.

§ 5.

Strukturuntersuchungen mittels Grundkörpererweiterung.

Unter Verwendung der Bezeichnungen von Satz 23 wollen wir die Struktur der primären Algebra L_M näher untersuchen. Dazu führen wir entsprechend Satz 14 die (für $i = 1$ als Konstanten zu verstehenden) Polynome

$$f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}) \varepsilon K[x_1, \ldots, x_{i-1}] \text{ (in } x_k \text{ vom Grad } < q_k/q_i)$$
$$g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}) \varepsilon M[x_1, \ldots, x_{i-1}] \text{ (in } x_k \text{ vom Grad } < q_k'/q_i')$$

ein mit

$$a_i^{q_i} = f_i(a_1^{q_i}, \ldots, a_{i-1}^{q_i}) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{12}$$

$$a_i^{q_i} = g_i(a_1^{q'_i}, \ldots, a_{i-1}^{q'_i}) \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{13}$$

Es gibt nun in L_M Elemente $b_1, \ldots, b_m$, die bei dem Homomorphismus (s. Satz 22) auf LM in die $a_1, \ldots, a_m$ übergehen und ebenfalls den Beziehungen (12) genügen. Ihre Potenzprodukte $b_1^{i_1} \ldots b_m^{i_m}$ $(0 \leqq i_k < q_k)$ bilden eine Basis von $L_M | M$. Um daraus entsprechend den in [10, S. 231—232] durchgeführten algebrentheoretischen Entwicklungen eine dem Aufbau von L_M aus LM und dem Radikal $\mathfrak{w}$ angepaßte Basis zu gewinnen, beachten wir, daß der M-Modul $M_b = \sum_{0 \leqq i_k < q_k'} M \cdot b_1^{i_1} \ldots b_{m'}^{i_{m'}}$ ein additionstreues Repräsentantensystem der Restklassen von L_M mod . $\mathfrak{w}$ ist. Mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnete Polynome sollen im Folgenden immer Polynome über M_b sein. Zum Aufbau von L_M über M_b führen wir die wegen (13) in $\mathfrak{w}$ liegenden Elemente

$$w_i' = b_i^{q_i'} - g_i(b_1^{q_i'}, \ldots, b_{i-1}^{q_i'}) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{14}$$

ein. Bei $\bar{q}_i = 1$ ist wegen (12) $f_i = g_i$, also $w_i' = 0$. Daher führen wir für den k-ten Index i in der Reihe $1, \ldots, m$ mit $\bar{q}_i > 1$ die Bezeichnung $\{k\}$ ein und setzen $\bar{q}_i = r_k$, $w_i' = w_k$. Die Anzahl der so erhaltenen w_k sei n. Jedes Potenzprodukt der $b_1, \ldots, b_i$ aus unserer Basis von $L_M | M$ läßt sich nun als Polynom über M_b in den w_k mit $\{k\} \leqq i$ schreiben, wobei in den Koeffizienten nur die $b_1, \ldots, b_i$ vorkommen. Für $i = 1$ ist dies nämlich wegen $g_1 \varepsilon M$ trivial. Die Reduzierung des Exponenten von $b_i (i > 1)$ auf einen Wert $< q_i'$ liefert ferner nach (14) eine Linearkombination von Potenzprodukten der $b_1, \ldots, b_i$ und des w_k mit $\{k\} = i$ (falls es ein solches gibt), die in b_i bereits vom Grad $< q_i'$ sind. Damit aber ist die Behauptung für i auf diejenige für $i - 1$ zurückgeführt. Wir behaupten ferner: Jedes Polynom über M_b in den $w_1, \ldots, w_i$ läßt sich als Polynom von einem Grad $< r_k$ in w_k $(k = 1, \ldots, i)$ schreiben — ein solches heiße im folgenden *reduziert* —, in dessen Koefizienten außer den ursprünglich vorkommenden nur die b_k mit $k < \{i\}$ auftreten; dabei gilt speziell

$$w_i^{r_i} = F_i(w_1, \ldots, w_{i-1}) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{15}$$

worin F_i ein reduziertes Polynom mit verschwindendem Absolutglied ist, in desssen Koeffizienten nur die b_k mit $k < \{i\}$ vorkommen. Für $i = 1$ ist diese Behauptung mit $F_1 = 0$ richtig; denn nach der aus (12) und (14) folgenden Beziehung

$$w_i^{\overline{q_i}} = f_i(b_1^{q_i}, \ldots, b_{i-1}^{q_i}) - g_i^{\overline{q_i}}(b_1^{q_i}, \ldots, b_{i-1}^{q_i}) \tag{16}$$

— in der g^q dasjenige Polynom bedeute, dessen Koeffizienten die q-ten Potenzen der Koeffizienten von g sind — liegt $w_i^{r_i}$ bereits in M. Wir nehmen sie weiter als richtig für $i-1\,(1 < i \leqq n)$ an. Nach (16) und dem bereits gewonnenen Ergebnis über die Umformung von Potenzprodukten der b ist nun $w_i^{r_i}$ Polynom über M_b in den w_k mit $\{k\} \leqq \{i\} - 1$, also $k \leqq i-1$, wobei in den Koeffizienten nur solche b mit einem Index $< \{i\}$ vorkommen. Nach dem ersten Teil der Behauptung für $i-1$ ist daher der zweite Teil für i bewiesen, wenn wir noch beachten, daß wegen $M_b \cap \mathfrak{w} = 0$ der Wert $F(w_1, \ldots, w_n)$ eines Polynoms dann und nur dann in $\mathfrak{w}$ liegt, falls dessen Absolutglied verschwindet. Wegen der Form von (15) treten bei einer Reduktion des Exponenten von w_i zusätzlich nur solche b mit einem Index $< \{i\}$ auf. Die für sie durchzuführende Reduzierung der Exponenten liefert aber nur w_k mit $\{k\} < \{i\}$, also $k < i$, so daß nach Induktionsvoraussetzung auch der erste Teil der Behauptung für i bewiesen ist. Da ferner die Anzahl der nicht in M_b liegenden reduzierten Potenzprodukte

$$b_1^{i'_1} \ldots b_{m'}^{i'_{m'}} w_1^{i_1} \ldots w_n^{i_n} \left(0 \leqq i'_k < r'_k,\ 0 \leqq i_k < r_k,\ \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu > 0\right)$$

gleich $\prod q'_k (\prod r_k - 1) = (L_M : M) - (L\,M : M) = (\mathfrak{w} : M)$, dem Rang von $\mathfrak{w}$ über M, ist, bilden sie eine Basis von $\mathfrak{w} \mid M$, so daß die Zuordnung der Elemente von $\mathfrak{w}$ zu den reduzierten Polynomen über M_b mit verschwindendem Absolutglied eindeutig ist.

Wir wollen nun die Gestalt der Beziehungen (15) in Verbindung bringen mit denjenigen Invarianten der Algebra $L_M \mid M$, die in [10, S. 233] zum *Geschlecht* $(m_1, \ldots, m_{\varrho-1})$ der *zugeordneten Algebren* zusammengefaßt worden sind: Dabei ist ϱ der durch $\mathfrak{w}^{\varrho-1} \supset \mathfrak{w}^\varrho = 0$ charakterisierte *Index* der Algebra und m_i der Rang des $L\,M$-Moduls $\mathfrak{w}^i/\mathfrak{w}^{i+1}$, also $m_i = 0$ für $i \geqq \varrho$. Nun ist $m_i = \dfrac{(\mathfrak{w}^i : M) - (\mathfrak{w}^{i+1} : M)}{(L\,M : M)}$, und $\mathfrak{w}_i$ enthält den M-Modul $\mathfrak{w}_i$ derjenigen Polynome über M^b, in denen kein Glied von einem Grad $< i$ vorkommt. Mit Hilfe der Funktion $\varphi(x; u_1, \ldots, u_n)$ als Anzahl der ganzzahligen Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ des Gleichungssystems $\sum_{i=1}^{n} y_i = x$ mit den Bedingungen $0 \leqq y_i < u_i$ finden wir nun

$$\frac{(\mathfrak{w}^i : M)}{(L\,M : M)} \geqq \frac{(\mathfrak{w}_i : M)}{(L\,M : M)} = \sum_{k=i}^{r-1} \varphi(k; r_1, \ldots, r_n),$$

also im Grenzfall $\mathfrak{w}^i = \mathfrak{w}_i$, $\mathfrak{w}^{i+1} = \mathfrak{w}_{i+1}$:

$$m_i = \varphi(i; r_1, \ldots, r_n).$$

Wie sich das Auftreten des *Extremfalles* $\mathfrak{w}_i = \mathfrak{w}^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ bzw die Abweichung von ihm aus den F_k erkennen läßt, formuliert

Satz 25. *Ist* $m_i = \varphi(i; r_1, \ldots, r_n)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *so enthält kein* $F_k (k = 1, \ldots, n)$ *ein Glied vom Grad* $< r_k$. *Gibt es dagegen ein* i *mit* $m_i \neq \varphi(i; r_1, \ldots, r_n)$, *so enthält mit* h *als dem kleinsten derartigen* i*-Wert mindestens ein* F_k *ein Glied vom Grad* $h < r_k$ *aber kein* F_k *Glieder vom Grad* $< Min(h, r_k)$, *und es gilt* $m_h < \varphi(h; r_1, \ldots, r_n)$.

Zusatz A. *Der Extremfall tritt insbesondere dann ein, wenn alle* $q_k' < q_k$ *denselben Wert haben, und zwar ist dann jedes* F_k *bereits Polynom in den* r_k*-ten Potenzen seiner Unbestimmten.*

Zusatz B. *Allgemein ist* F_k *bereits Polynom in den* r_k*-ten Potenzen derjenigen seiner Unbestimmten, für deren Index* j *die Ungleichung* $\{j\} > m'$ *gilt.*

Zum Beweis zeigen wir zunächst, daß $\mathfrak{w}^i \subseteq \mathfrak{w}_i$ für $i \leqq h$, wenn kein F_k Glieder von einem Grad $< \mathrm{Min}(h, r_k)$ enthält. Jedes Element von $\mathfrak{w}^i$ läßt sich nämlich als — nicht notwendig reduziertes — Polynom über M_b schreiben, das kein Glied von einem Grad $< i$ enthält. Bei einer Reduktion der Exponenten mittels (15) entstehen aber für $h < r_k$ stets Glieder von einem Grad $\geqq h \geqq i$, und bei $h \geqq r_k$ können aus einem Glied nur Glieder von nicht kleinerem Grad hervorgehen:

$$w_k^{i_k} = w_k^{i_k - r_k} \sum_{i_1 + \cdots + i_{k-1} \leqq r_k} {}^{*}\, w_1^{i_1} \ldots\ldots w_{k-1}^{i_{k-1}} \quad (* = \text{Elemente von } M_b)$$

Damit ist dann auch $m_i = \varphi(i; r_1, \ldots, r_n)$ für $i < h$ bewiesen. Gibt es nun ein maximales h der beschriebenen Eigenschaft, also ein k so, daß F_k ein Glied vom Grad $h < r_k$ besitzt, so erzeugen die $\varphi(h; r_1, \ldots, r_n)$ Potenzprodukte $w^{i_1} \ldots\ldots w_n^{i_n}$ $(i_1 + \cdots + i_n = h)$ zwar noch wegen $\mathfrak{w}^h = \mathfrak{w}_h$, $\mathfrak{w}^{h+1} \supseteq \mathfrak{w}_{h+1}$ den LM-Modul $\mathfrak{w}^h/\mathfrak{w}^{h+1}$, sind aber nicht mehr linearunabhängig: (15) ergibt nämlich wegen $h + 1 \leqq r_k$ nach Restklassenbildung mod. $\mathfrak{w}^{h+1}$ eine lineare Beziehung zwischen ihnen mit nichtverschwindenden Koeffizienten aus LM. Also ist $m_h < \varphi(h; r_1, \ldots, r_n)$. $m_i = \varphi(i; r_1, \ldots, r_n)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ist daher gleichbedeutend damit, daß es kein maximales h der beschriebenen Eigenschaft gibt. Das heißt aber: Kein F_k enthält Glieder vom Grad $< r_k$. Damit ist Satz 25 in vollem Umfang bewiesen. Seine Bedeutung liegt darin, daß er einmal das Auftreten des Extremfalles allein aus der Gestalt der F zu erkennen gestattet und zum andern bei Nichtvorliegen des Extremfalles die Abweichung von demselben durch die bereits aus der Gestalt der F zu bestimmende Invariante h beschreibt. Durch den Zusatz A werden diese Fragen mit den Werten der Exponenten von $LM|M$ und $L|K$ verknüpft. Die zu beweisende Behauptung fassen wir als Spezialfall $k = 0$ der folgenden Aussage auf: (A_k) „*Unter der Voraus-*

setzung $q r_j = q'_{\{j\}} r_i$ $(j = 1, \ldots, i-1;\ q = q'_{\{i\}})$ *läßt sich* $w_i^{r_i}$ *als Polynom über* M *in den*

$$b_1^q, \ldots, b_{\{k\}}^q,\ b_{\{k\}+1}^q, \ldots, b_{\{i\}-1}^q,\ w_{k+1}^{r_i}, \ldots, w_{i-1}^{r_i}$$

schreiben, das in den $b_{\{k\}+1}^q, \ldots, b_{\{i\}-1}^q, w_{k+1}, \ldots, w_{i-1}$ *reduziert ist.*" (A_{i-1}) ist richtig, da in (16) die Exponenten der $b_{\{i-1\}+1}^q, \ldots, b_{\{i\}-1}^q$ ohne Auftreten von w-Gliedern reduziert werden. Unter Voraussetzung von (A_k), $k \geqq 1$ kann man nun mittels (12) erreichen, daß das Polynom für $w_i^{r_i}$ in $b_{\{k\}}^q$ einen Grad $< r_k/r_i$ besitzt. (14) ergibt

$$b_{\{k\}}^q \doteq w_k^{r_i} + g(b_1^q, \ldots, b_{\{k\}-1}^q),$$

womit unser Polynom auch in $b_{\{k\}}^q$ und w_k reduziert ist. Da es in den $b_{\{k-1\}+1}^q, \ldots, b_{\{k\}-1}^q$ ohne Auftreten neuer w-Glieder reduziert werden kann, wobei nur q-te Potenzen der b vorkommen, haben wir (A_{k-1}) aus (A_k) hergeleitet. Damit ist (A_k) allgemein für $0 \leqq k < i$ bewiesen. Dieselben Überlegungen zeigen ohne die über die q' gemachten Voraussetzungen die Richtigkeit der Behauptung von (A_k) für das kleinste k mit $\{k\} > m'$; denn für alle j mit $j \geqq k$ gilt dann $q'_{\{j\}} = r_j$. Die Reduktion der restlichen $b_1^q, \ldots, b_{k-1}^q$ ergibt aber keine w_j mit $\{j\} > m'$, weshalb damit auch Zusatz B bewiesen ist.

Der Fall von Zusatz A liegt speziell bei $L \subseteq M$ vor, da dann alle q'_i gleich 1 sind. Unsere allgemeinen Entwicklungen liefern so den in § 3 beim Beweis von Satz 14 erwähnten Nachweis der Invarianz der Exponenten von $L|K$. Aus den Invarianten m_i bestimmen sich nämlich mit Hilfe der Beziehungen $m_i = \varphi(i; q_1, \ldots, q_m)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eindeutig die q_k sowohl wie ihre Anzahl m [10, S. 230]. Diese Eigenschaft der Funktion φ führt weiter zu

Satz 26. *Sind* $e_1, \ldots, e_m$ *die Exponenten von* $L|K$ *und* $e'_1, \ldots, e'_{m'}$ *die von* L *bezogen auf einen Zwischenkörper* M, *so hat* $M|K$ *im Extremfall genau die* e_i $(i = m'+1, \ldots, m)$ *und die von Null verschiedenen unter den* $e_i - e'_i$ $(i = 1, \ldots, m')$ *zu Exponenten.*

Einerseits sind nämlich die m_i der Algebra L_M durch

$$m_i = \varphi(i; r_1, \ldots, r_n)$$

gegeben, da ja der Extremfall vorliegen sollte. Andererseits kann man aber auch die m_i durch Bildung von $M_L = L_M$ bestimmen. Dabei liegt nach Zusatz A wieder der Extremfall vor, so daß die Exponenten der r_i tatsächlich bis auf die Reihenfolge die Exponenten von $M|K$ sind.

Auf Zusatz A von Satz 25 angewandt erhalten wir aus Satz 26

Satz 27. *Sind* $e_1, \ldots, e_m$ *die Exponenten von* $L|K$ *und* $e'_1, \ldots, e'_{m'}$ *die von* L *bezogen auf einen Zwischenkörper* M, *so hat* $M|K$ *im Falle*

a) $m' < m$, $e'_i = e_i$ $(i = 1, \ldots, m')$:

die Vielfachheit $m - m'$ *und die Exponenten* $e_{m'+1}, \ldots, e_m$,

b) $m' = m$, $e_i' = e_i$ für $i < s$, $e_i' = e$ für $i \geqq s$ $(0 < s \leqq m,\ 0 < e < e_m)$: *die Vielfachheit* $m - s + 1$ *und die Exponenten* $e_s - e, \ldots, e_m - e$,

c) $m = m'$, $e_i' = e$ für $s \leqq i < t$, $e_i' = e_i$ sonst $(e_t \leqq e < e_{t-1},\ 0 < s < t \leqq m)$: *die Vielfachheit* $t - s$ *und die Exponenten* $e_s - e, \ldots, e_{t-1} - e$.

Zum Beweis ist lediglich zu beachten, daß wir unter Benutzung der Zuordnung von Satz 4 den Beweis nur für rein-inseparable Erweiterungen $L|K$ und $M|K$ zu führen brauchen, und daß a), b), c) von der trivialen Ausnahme $L = M$ abgesehen genau die möglichen Unterfälle von A sind. Besonders hervorgehoben sei noch der Sonderfall $s = 1$ von b), der dadurch ausgezeichnet ist, daß $M|K$ dieselbe Vielfachheit m wie $L|K$ besitzt. Daß selbst hier die Schlußrichtung von Satz 26 nicht umgekehrt werden darf, zeigt das einfache Beispiel:

$$K = P_p(u, v),\ L = K(u^{p^{-3}}, v^{p^{-2}}),\ M = K(v^{p^{-2}}, u^{p^{-1}}).$$

Es liegen hier besonders einfache Verhältnisse vor: $a_i^{q_i} \varepsilon K$, $a_i^{q_i'} \varepsilon M$, also g_i und f_i konstant. Unter diesen Voraussetzungen ist aber $F_i = 0$, d. h. wir haben nach Satz 25 den Extremfall.

Das Beweisprinzip von Satz 26 führt uns ferner noch zu der Verallgemeinerung des in § 3 erwähnten Steinitzschen Satzes.

Satz 28. *Jeder Zeichenkörper einer Erweiterung der Vielfachheit* m *hat eine Vielfachheit* $\leqq m$.

Nach Satz 15 können wir uns beim Beweis auf rein-inseparable Erweiterungen beschränken. Die Berechnung von $m_1 = (\mathfrak{w}/\mathfrak{w}^2 : LM)$ entsprechend der Erzeugung des direkten Algebrenproduktes in der Form L_M liefert nach Satz 25 $m_1 \leqq n \leqq m$, während die andere Möglichkeit der Erzeugung in der Form M_L nach dem Zusatz A von Satz 25 — wie schon weiter oben erwähnt — m_1 als Vielfachheit von $M|K$ erkennen läßt.

Die somit für Vielfachheitsfragen bei Zwischenkörpern wesentliche Invariante m_1 — in [10, S. 233] als *Defekt* der Algebra L_M bezeichnet — läßt sich nun sehr einfach aus den F_i bestimmen. Mit der Abkürzung $f(x)$ für ein Polynom $f \varepsilon M[x_1, \ldots, x_m]$, das in x_k einen Grad $< q_k'$ hat, behaupten wir

Satz 29. *Ist* $\sum_k u_{ik}(b) z_k$ *mit* $u_{ik} = 0$ *für* $i \leqq k$ *der Linearanteil von* $F_i(z_1, \ldots, z_{i-1})$, *so hat die Matrix*

$$(u_{ik}(a))\begin{pmatrix} i = 2, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

den Rang $n - m_1$.

Zum Beweis bezeichnen wir mit $\overline{w}_i$ die Restklasse mod $\mathfrak{w}^2$ von w_i. Die $\overline{w}_i$ bilden dann eine Modulbasis des LM-Moduls $\mathfrak{w}/\mathfrak{w}^2$. Um dessen Rang m_1 zu bestimmen, untersuchen wir die Gesamtheit der bestehenden linearen Abhängigkeiten $\sum_i v_i(a)\overline{w}_i = 0$, wobei gemäß unserer

Bezeichnungsfestsetzung die $v_i(a)$ Elemente von LM sind. Es gibt dann ein Polynom $H(z_1, \ldots, z_n)$ ohne Absolutglied und ohne lineare Glieder, so daß $\sum v_i(b) w_i = H(w_1, \ldots, w_n)$ ist. Diese Gleichung drückt die Reduktion von H, d. i. die im Beweis von Satz 25 verwandte Reduktion der Exponenten der w, aus. Wir ersetzen nun die b durch Unbestimmte x. Die entsprechend (14) dadurch an die Stelle der w_i' tretenden Polynome $x_i^{q_i'} - (g_i^{q_i'}, \ldots, x_{i-1}^{q_i'})$ bezeichnen wir für $q_i' < q_i$ den w_k entsprechend mit $z_1, \ldots, z_n$, die übrigen mit $y_1, \ldots, y_{m-n}$. Im Polynomring $R = M[x_1, \ldots, x_m]$ bedeutet dann die vorliegende Reduktion von H, die sich nach dem zu Anfang des Paragraphen Entwickelten allein auf (14) und (15) stützt, eine Identität

$$-H(z_1, \ldots, z_n) + \sum v_i(x) z_i = \sum \varphi_k(x)(z_k^{r_k} - F_k(z_1, \ldots, z_{k-1})) + \sum \psi_k(x) y_k.$$

Die φ und ψ sollen dabei Polynome ohne jede Gradbeschränkung bedeuten, und in H sowohl wie in den F sind die b durch die x ersetzt zu denken. Jedes Element von R läßt sich offenbar als Polynom in den y, z mit Koeffizienten aus dem analog zu M_b gebildeten Modul M_x darstellen. Daß diese Darstellung eindeutig bestimmt ist, sieht man so: Über dem Polynomring $M[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{m-n}, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n]$ konstruieren wir eine Algebra A mit den Basiselementen $\bar{x}_1^{i_1} \ldots \bar{x}_{m'}^{i_{m'}}$ $(0 \leqq i_k < q_k')$, deren Multiplikationstafel durch die den Definitionsgleichungen der y, z entsprechenden Beziehungen zwischen den $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ bestimmt ist. Da jedes Element von R Polynom in den y, z über M_x ist, wird A durch $\bar{x}_i \to x_i$, $\bar{y}_i \to \bar{y}_i$, $\bar{z}_i \to z_i$ homomorph auf R abgebildet. Die $\bar{x}_i$ als Erzeugende von A über M sind somit freie Erzeugende und der Homomorphismus ein Isomorphismus. Damit ist die behauptete Eindeutigkeit der Darstellung als Polynom über M_x bewiesen. Bezeichnen wir nun mit $h_{ki}(x)$ das Absolutglied in dieser Darstellung für $\varphi_k(x) u_{ki}(x)$, so ergibt der Koeffizientenvergleich von z_i in unserer Identität

$$v_i(x) = \sum_k h_{ki}(x).$$

Setzen wir noch $\varphi_k(b) \equiv h_k(b) \mod . \mathfrak{w}$, so folgen wegen

$$h_{ki}(b) \equiv \varphi_k(b) u_{ki}(b) \mod . \mathfrak{w}$$

die Beziehungen $v_i(a) = \sum_k h_k(a) u_{ki}(a)$. Damit haben wir die offenbar geltenden Gleichungen $\sum_i u_{ki}(a) \bar{w}_i = 0$ als die bis auf Linearkombinationen einzigen Abhängigkeiten zwischen den $\bar{w}_i$ erkannt, woraus sofort die Behauptung folgt. Daraus leiten wir nun her

Satz 30. *Ist $M|K$ einfach und Zwischenkörper der Erweiterung $L|K$ mit den Exponenten $e_1, \ldots, e_m$, so bestehen für die Exponenten e_i' von $L|M$ die Ungleichungen $e_1 \geqq e_1' \geqq e_2 \geqq \ldots \geqq e_{m-1}' \geqq e_m$.*

Gemäß der in Satz 4 angegebenen Zuordnung können wir uns beim Beweis auf rein-inseparable Erweiterungen beschränken. Aus

dem Beweis von Satz 28 wissen wir, daß wegen der Einfachheit von $M|K$ $m_1 = 1$ ist. Nach Satz 29 sind daher die $u_{i,i-1} \neq 0$ $(i = 2, \ldots, m)$. In $F_i(w_1, \ldots, w_{i-1})$ tritt also w_{i-1} nicht nur in der Form w_{i-1}^p auf. Führen wir nun die beim Beweis des Zusatzes von Satz 25 beschriebene Reduktion mit $k = i - 1$ durch, so haben wir im Falle $q'_{\{i-1\}} < q_{\{i\}}$, also $q \cdot q'^{-1}_{\{k\}} = q' \equiv 0\,(p)$,

$$b^q_{\{k\}} = w_k^{q'} + g(b_1^q, \ldots, b^q_{\{k\}-1}).$$

Mit dieser Ersetzung ist die Reduktion bez. w_k bereits durchgeführt, da das Ausgangspolynom in $b_{\{k\}}$ einen Grad $< q_{\{k\}}$, also nach der Ersetzung einen Grad $< r_k$ in w_k hat, was auch durch die nachfolgenden Reduktionen in den b_j mit $j < \{k\}$ nicht geändert wird. Bei $m_1 = 1$ muß daher $q_{\{i\}} \leqq q'_{\{i-1\}}$ sein. Für $j = \{i-1\} + 1 < \{i\}$ ist diese Ungleichung wegen $q'_{j-1} \geqq q'_j = q_j \geqq q_{\{i\}}$ immer erfüllt. Im andern Falle folgt $q'_{j-1} \geqq q_j$ für $j = \{i-1\} + 1 = \{i\}$. Diese Beziehung gilt aber sowieso, wenn j nicht diese Bedeutung besitzt, also $q'_{j-1} = q_{j-1}$ oder $q'_j = q_j$ ist. Daß die damit für einfache $M|K$ bewiesenen Ungleichungen durchaus nicht hinreichend für die Einfachheit von $M|K$ sind, zeigt bereits das Beispiel $K = P_p(u, v)$, $L = K(u^{p^{-2}}, v^{p^{-1}})$, $M = K(u^{p^{-1}}, v^{p^{-1}})$.

Aus Satz 30 ergibt sich noch eine Charakterisierung der Exponenten von L K ohne Benutzung einer ausgezeichneten Erzeugung von L aus dem m. s. Zk.:

Satz 31. *Der i-te Exponent $(i = 2, \ldots, m)$ von $L|K$ ist das Minimum der ersten Exponenten von L über den Unterkörpern, die $(i-1)$-fache Erweiterungen von K sind.*

O. B. d. A. können wir wieder $L|K$ als rein-inseparabel annehmen. Da nach Definition e_i der Exponent von $L|K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ in einer ausgezeichneten Erzeugung $L = K(a_1, \ldots, a_m)$ ist, genügt es zu zeigen, daß für einen über K $(i-1)$-fachen Unterkörper M von L der Exponent $\geqq e_i$ ist. Für $i = 2$ folgt das sofort aus Satz 30. Ist nun die Behauptung für ein $i < m$ richtig und $N \subset L$ eine i-fache Erweiterung von K, so wird $M = K(a) \subset N$ so gewählt, daß $N|M$ die Vielfachheit $i - 1$ hat. Betrachten wir M als Grundkörper, so ist also der Exponent von $L|N$ nicht kleiner als der i-te Exponent e'_i von $L|M$. Da nach Satz 30 aber $e'_i \geqq e_{i+1}$ gilt, ist die Behauptung unter Voraussetzung ihrer Richtigkeit für i auch für $i + 1$ bewiesen und damit allgemein für $i = 2, \ldots, m$.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses gelingt der Beweis des Gegenstückes zu Satz 30, nämlich

Satz 32. *Hat $L|K$ die Exponenten $e_1, \ldots, e_m$, und ist L einfache Erweiterung des Oberkörpers M von K, so gilt für die Exponenten e_i^* von $M|K$ die Ungleichung $e_1 \geqq e_1^* \geqq e_2 \geqq \ldots \geqq e_{m-1}^* \geqq e_m$ $(\geqq e_m^*$, falls $M|K$ ebenfalls m-fach).*

$L|K$ sei o. B. d. A. als rein-inseparabel vorausgesetzt und K' eine i-fache, in M enthaltene Erweiterung von K, bez. der M den Exponenten e_i^* hat. Dann ist wegen der Einfachheit von $L|M$ auch $L^{p^{e_i^*}}K' = L''$ einfache Erweiterung von K'. $L'|K$ hat also höchstens die Vielfachheit i, weshalb nach Satz 31 für den Exponenten e von $L|L'$ die Ungleichung $e \geqq e_{i+1}$ gilt. Andererseits ist aber $e \leqq e_i^*$, also $e_i^* \geqq e_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, m-1)$. Die übrigen Ungleichungen lassen sich ohne Berufung auf Satz 31 und bei beliebiger Vielfachheit von $L|M$ beweisen. Es genügt offensichtlich, den Beweis für den Fall $L = M(a)$, $a^p \varepsilon M - M^p$ zu führen. Es sei $M = K(a_1, \ldots, a_{m^*})$ eine ausgezeichnete Erzeugung. Wir betrachten nun zuerst den Fall, daß für kein i der Exponent von a bez. $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ größer als e_i^* ist. Dann hat $L|K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ den Exponenten e_i^* und $L|K(a_1, \ldots, a_{m^*})$ den Exponenten 1. Nach Satz 14 ist daher $L = K(a_1, \ldots, a_{m^*}, a)$ eine ausgezeichnete Erzeugung von $L|K$, also $m^* = m-1$, $e_i = e_i^*$ für $i < m$ und $e_m = 1$. Im anderen Fall sei h das kleinste i, für das a bez. $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ einen Exponenten $> e_i^*$ hat. Wir setzen $K(a_1, \ldots, a_{i-1}) = K'$. Dann gilt also für den Exponenten e von a^p bez. K' einerseits $e \leqq e_h^*$, andererseits $e > e_h^* - 1$, also $e = e_h^*$. Nach Satz 14 lassen sich daher die $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{\bar{m}}$ $(\bar{m} = m^* - h)$ so unter den $a_h, \ldots, a_{m^*}$ auswählen, daß

$$M = K(a_1, \ldots, a_{h-1}, a^p, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{\bar{m}})$$

eine ausgezeichnete Erzeugung ist. $K(a_1, \ldots, a_{h-1}, a)$ ist nun nach Satz 14 eine ausgezeichnete Erzeugung von $K'(a)|K$ mit den Exponenten $e_1^*, \ldots, e_{h-1}^*, e_h^* + 1$, weil a bez. $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$ für $i < h$ einen Exponenten $\leqq e_i^*$ und bez. K' den Exponenten $e_h^* + 1$ besitzt. Wegen $K'(a^p) = M \cap K'(a)$ ist nach (8) eine Basis von $M|K'(a^p)$ auch eine solche von $L|K'(a)$. Bedingungen I, II aus Satz 14 für die $\bar{a}_i$ bleiben also auch bei Ersetzung von a^p durch a erhalten:

$$L = K(a_1, \ldots, a_{h-1}, a, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{\bar{m}})$$

ist eine ausgezeichnete Erzeugung. Daher haben wir $m = m^*$, $e_i = e_i^*$ für $i \neq h$, $e_h = e_h^* + 1$. Damit ist aber alles bewiesen. Zugleich haben wir die Frage beantwortet, wie sich die Exponenten einer Erweiterung bei Adjunktion einer p-ten Wurzel verändern.

§ 6.

Spezialfälle.

Zur Verdeutlichung der im vorigen Paragraphen allgemein dargestellten Methode und zur Gewinnung interessanter Einzelheiten wenden wir uns einigen Spezialfällen und zwar zuerst dem fast trivialen Fall $n = 1$ zu. Hier ist $m_1 = 1$ und damit nach [10, S 235]

auch $m_2 = \cdots = m_{\varrho-1}$, woraus sich wegen

$$1 + \sum_{i=1}^{\varrho-1} m_i = \prod_{k=1}^{n} r_k \tag{17}$$

sofort $\varrho = r_1$ ergibt. Die aus $m_1 = 1$ folgende Einfachheit wurde schon am Ende des vorigen Paragraphen betont. Anwendung von Satz 27 liefert nur den bereits aus der Einfachheit durch Gradbetrachtung folgenden Wert $e_{\{1\}} - e'_{\{1\}}$ für den Exponenten von $M|K$.

Bei $n = 2$ schließen wir zuerst einmal den Extremfall aus. Dann ergeben sich als Spezialisierungen von (15) die Gleichungen

$$w_1^{r_1} = 0 \tag{18}$$

$$w_2^{r_2} = v(b)\, w_1^h + \cdots \qquad (v(b) \neq 0,\ h < \mathrm{Min}(r_1, r_2)) \tag{19}$$

$\mathfrak{w}^i$ besteht nun aus allen Linearkombinationen der Produkte

$$w_1^{i_1} w_2^{i_2} \quad (i_1 + i_2 \geqq i)$$

mit Koeffizienten aus M_b. Mit $i_2 = r_2 k + u$ $(k \geqq 0,\ 0 \leqq u < r_2)$ ist nach (19)

$$w_1^{i_1} w_2^{i_2} = v(b)^k\, w_1^{i_1 + hk}\, w_2^u + W,$$

wobei W in $\mathfrak{w}^{j+1}$ liegt, wenn das erste Summenglied in $\mathfrak{w}^j$ liegt. Also liegt dieses in $\mathfrak{w}^i$, und es ist

$$w_1^{i_1} w_2^{i_2} \equiv v(a)^k\, w_1^{i_1 + hk}\, w_2^u \bmod \mathfrak{w}^{i+1}.$$

Setzen wir noch wegen (18) mit der Abkürzung $-\left[-\frac{r_1}{h}\right] = s$

$$i_1 + hk = zh + y \qquad (0 \leqq z < s,\ 0 \leqq y < h),$$

so spannen also über M_b diejenigen Potenzprodukte

$$w_1^{zh+y} w_2^u \qquad (0 \leqq u < r_2,\ 0 \leqq y < h,\ 0 \leqq z < s) \tag{20}$$

für die es ein nichtnegatives $k \leqq z$ mit

$$u + y + (r_2 - h)k + zh \geqq i \tag{21}$$

gibt, mod $\mathfrak{w}^{i+1}$ den Modul $\mathfrak{w}^i$ auf. Wegen $r_2 - h > 0$ kann man in (21) k durch seinen maximalen Wert z ersetzen. Mit Hilfe der durch $u + r_2 z = x$ zwischen den Paaren u, z $(0 \leqq u < r_2,\ 0 \leqq z < s)$ und den Zahlen x $(0 \leqq x < s r_2)$ vermittelten eineindeutigen Zuordnung schreibt sich dann die Bedingung (21) für die Produkte (20) als

$$x + y \geqq i \qquad (0 \leqq x < s r_2,\ 0 \leqq y < h). \tag{22}$$

Nun liegen aber diejenigen Produkte (20), die (21) auch mit $i+1$ statt i erfüllen, nach dem eben Bewiesenen in $\mathfrak{w}^{i+1}$. Nach Definition von φ gibt es also $\mu_i = \varphi(i;\, s r_2,\, h)$ Produkte (20), die mod $\mathfrak{w}^{i+1}$ über M_b den Modul $\mathfrak{w}^i$ aufspannen. Daher ist $\mu_i \geqq m_i$. Da aber in (20) jedes reduzierte Potenzprodukt vorkommt, und jedes entsprechend

(22) zu genau einem maximalen $i = x + y$ gehört, ist nach (17) die Summe aller μ_i gleich der Summe der m_i, d. h. $\mu_i = m_i$, also

$$m_i = \varphi\left(i; -\left[-\frac{r_1}{h}\right] r_2, h\right). \tag{23}$$

Die Potenzprodukte (20) bilden also, wenn wir in ihnen w_i durch seine Restklasse mod $\mathfrak{w}^{i+1}$ ersetzen, eine linear-unabhängige Basis von $\mathfrak{w}^i/\mathfrak{w}^{i+1}$ über LM. Wie man leicht nachrechnet, gilt mit $u_2 \leqq u_1$

$$\varphi(x; u_1, u_2) = \begin{cases} x+1 & \text{für } 0 \leqq x < u_2 \\ u_2 & \text{für } u_2 \leqq x < u_1 \\ u_2 + u_1 - 1 - x & \text{für } u_1 \leqq x < u_1 + u_2 - 1 \\ 0 & \text{für } u_1 + u_2 - 1 \leqq x. \end{cases}$$

Insbesondere hat der Index ϱ von L_M den Wert

$$\varrho = h - \left[-\frac{r_1}{h}\right] r_2 - 1. \tag{24}$$

Setzen wir im Extremfall noch $h = \mathrm{Min}(r_1, r_2)$, so gilt (23) — und damit (24) — offenbar allgemein.

Wählen wir jetzt speziell $M \subseteq L$, so ergibt das Beweisprinzip von Satz 26 aus (23) die Beziehungen

$$h = q_2^*, \quad \frac{r_1 r_2}{h} = q_1^*, \tag{25}$$

worin $q_i^* = p^{e_i^*}$ ist und e_1^*, e_2^* die Exponenten von $M|K$ sind; denn wegen $h \leqq \mathrm{Min}(r_1, r_2)$ ist ja $h \leqq \frac{r_1 r_2}{h}$. Unter Benutzung von (25) können wir nun beweisen

Satz 33. *Die zweifache Erweiterung $L|K$ mit den Exponenten e_1, e_2 ist einfach über dem bez. K zweifachen Zwischenkörper M, wenn der zweite Exponent e_2 von $L|K$ mit dem von $M|K$ übereinstimmt.*

Wie bei den Sätzen des vorigen Paragraphen können wir uns auch hier auf rein-inseparable Erweiterungen beschränken. Nach (25) ist nun

$$q_2^* \leqq \frac{q_2}{q_2'}, \tag{26}$$

also $q_2' = 1$ wegen $e_2^* = e_2$, d. h. $L|M$ ist einfach. Dies ist das Gegenstück zu der sich aus Satz 16 ergebenden Einfachheit von $L|M$ im Falle des Übereinstimmens der ersten Exponenten.

Da nach dem am Ende von § 5 Bewiesenen $e_2^* \leqq e_2$ gilt — was übrigens auch aus (26) folgt — läßt sich außer im Fall $e_1 > e_1^* \geqq e_2$ ($> e_2^*$ falls $M|K$ zweifach) mit Hilfe der Sätze 16, 32, 33 die Vielfachheit von $L|M$ aus den e^*, e allein bestimmen. Eine solche Bestimmung ist in dem Ausnahmefall nun tatsächlich unmöglich. Zum Beweis geben wir mit $K = P_p(u, v)$ zu $M = K(u^{p^{-3}}, v^{p^{-1}})$, also $e_1^* = 3$, $e_2^* = 1$,

die Oberkörper $L = K((u + v^p)^{p^{-4}}, v^{p^{-2}})$ und $L' = K(u^{p^{-4}}, v^{p^{-2}})$ an, die beide die Exponenten $e_1 = 4$, $e_2 = 2$ haben. LM ist einfach, $L'|M$ dagegen zweifach. Zur Verdeutlichung der Methode stellen wir für L noch die Formeln (14), (15) auf, wobei wir für $L_M = M_L$ als Algebra über K die Basis aus den Potenzprodukten

$$b_1^{i_1} b_2^{i_2} c_1^{k_1} c_2^{k_2} \quad (0 \leqq i_1 < p^4,\ 0 \leqq i_2 < p^2,\ 0 \leqq k_1 < p^3,\ 0 \leqq k_2 < p)$$

mit

$$b_1^{p^4} = u + v^p, \quad b_2^{p^2} = v, \quad c_1^{p^3} = u, \quad c_2^p = v$$

verwenden:

$$w_1 = b_1^{p^2} - c_2^p - c_2, \quad w_2 = b_2 - b_1^p + c_1, \quad w_1^{p^2} = 0, \quad w_2^{p^2} = -w_1^p,$$

woraus sich in Übereinstimmung mit (25) $h = p$ ergibt.

Für $n \geqq 3$ läßt sich die bei $n = 2$ befolgte Methode nicht mehr allgemein anwenden, weil in einem F_i mit $i > 2$ mehrere Glieder kleinsten Grades auftreten können. Wir beschränken uns daher, um über $n = 2$ hinaus Aussagen machen zu können, auf den Fall $m' = 1$, in welchem nach Satz 25, Zusatz B in F_i nur Glieder der Form $v(b) w_1^k$ einen Grad $< r_i$ haben können. Zur Vermeidung umständlicher Fallunterscheidungen behandeln wir auch davon nur einen Spezialfall, nämlich den einer dreifachen Erweiterung $L|K$ von den Exponenten e_1, e_2, e_3 mit einem Zwischenkörper M, der über K die Exponenten e_1^*, e_2^* besitzt, und über dem L einfach mit dem Exponenten e ist. Dabei nehmen wir o. B. d. A. $L|K$ als rein-inseparabel an. $n = 1$ ist unmöglich, da ja sonst MK einfach wäre. Ist $n = 2$, so muß $q_1' = q_1$, also $e = e_1$ sein, da ja $q_2' = 1 < q_2$ und $q_3' = 1 < q_3$ gilt. Also haben wir $r_1 = q_2$ und $r_2 = q_3$. Nach Satz 27 a) gilt dann für die $q_i^* = p^{e_i^*}$ von $M|K$

$$(27_1) \qquad q_1^* = q_2, \quad q_2^* = q_3.$$

Für $n = 3$ ist nun nach Satz 25 wegen $m_1 = 2 < n$ notwendigerweise $h = 1$. Wir können daher die Numerierung von w_2, w_3 noch so ändern, daß $w_2^{r_2} = v(b) w_1 + \cdots$, $(v(b) \neq 0)$ und $w_3^{r_3} = v^*(b) w_1^k + \cdots$, $(1 \leqq k < \mathrm{Min}(r_1, r_3),\ v^*(b) \neq 0)$ ist, falls F_3 überhaupt Glieder vom Grad $< r_3$ enthält. Wie beim Beweis von Satz 30 wird dann ein Produkt $w_1^{i_1} w_2^{i_2} w_3^{i_3}$ mit $\sum_\nu i_\nu \geqq i$ auf reduzierte Potenzprodukte zurückgeführt. Mit

$$i_1 + u_2 + u_3 k = x_1, \quad i_\nu = r_\nu u_\nu + x_\nu \qquad (0 \leqq u_\nu,\ 0 \leqq x_\nu < r_\nu;\ \nu = 2, 3)$$

ergibt das mod $\mathfrak{w}^{i+1}$ eine Linearkombination von Potenzprodukten $w_1^{x_1} w_2^{x_2} w_3^{x_3}$ $(0 \leqq x_\nu < r_\nu)$, deren Exponenten der Bedingung genügen: Es gibt ein Paar nichtnegativer ganzer Zahlen u_2, u_3 mit

$$(28) \qquad u_2 + k u_3 \leqq x_1, \quad \sum_{\nu=1}^{3} x_\nu + (r_2 - 1) u_2 + (r_3 - k) u_3 \geqq i.$$

Der Ausnahmefall, daß F_3 keine Glieder vom Grad $< r_3$ enthält, ordnet sich dieser Formulierung unter, wenn wir dafür $k = \mathrm{Min}(r_1, r_3)$ setzen.

In diesem Fall nämlich ergibt die Reduktion von i_3 nur Glieder von nichtkleinerer Exponentensumme, so daß von vornherein $i_3 = x_3$ angenommen werden kann. Statt (28) haben wir dann

$$u_2 \leqq x_1, \quad \sum x_\nu + (r_2 - 1)\, u_2 \geqq i,$$

was — wie man leicht überlegt — mit Bedingung (28) für $k = \mathrm{Min}\,(r_1, r_3)$ gleichbedeutend ist. Zur Elimination von u_2, u_3 aus (28) bestimmen wir nun mit der ersten Ungleichung von (28) als Nebenbedingung das Maximum von $U = (r_2 - 1)\, u_2 + (r_3 - k)\, u_3$. Bei festem u_3 hat U offenbar den Maximalwert $(r_3 - r_2 k)\, u_3 + (r_2 - 1)\, x_1$. Im Falle $r_3 \leqq k r_2$ erhalten wir daher $\mathrm{Max}\,(U) = (r_2 - 1)\, x_1$ und (28) kann durch $(r_2 x_1 + x_2) + x_3 \geqq i$ ersetzt werden. Daraus aber ergibt sich ähnlich wie beim Beweis von (23) $m_i = \varphi(i; r_1 r_2, r_3)$. Im Falle $r_2 = q_2$, $r_3 = q_3$ folgt daraus

$$(27_3) \qquad q_1^* = \frac{q_1}{q_1'}\, q_3, \quad q_2^* = q_3$$

und im Falle $r_2 = q_3$, $r_3 = q_2$

$$(27_3) \qquad q_1^* = \frac{q_1}{q_1'}\, q_3, \quad q_2^* = q_2,$$

da ja $r_3 \leqq r_1 r_2$ ist. Gilt dagegen $r_3 > k r_2$, so setzen wir $x_1 = x_0 k + x$ $\left(0 \leqq x_0 < -\left[-\frac{r_1}{k}\right],\ 0 \leqq x < k\right)$ und erhalten wegen $\mathrm{Max}\,(u_3) = x_0$ den Wert $\mathrm{Max}\,(U) = (r_3 - k)\, x_0 + (r_2 - 1)\, x$. (28) läßt sich dann durch $(r_3 x_0 + x_3) + (r_2 x + x_2) \geqq i$ ersetzen, woraus wir $m_i = \varphi\left(i; -\left[-\frac{r_1}{k}\right] r_3, k r_2\right)$ erhalten. Da die beiden letzten Argumente von φ die Werte der q^* angeben, ist k ein Teiler von r_1 (und damit p-Potenz). Wegen

$$\frac{r_1 r_3}{k} > r_1 r_3 \geqq k r_2$$

folgt daher mit Beachtung von $r_2 = q_3$, $r_3 = q_2$

$$(27_4) \qquad q_1^* = \frac{q_1 q_2}{q_1' k}, \quad q_2^* = k q_3.$$

Aus den Gleichungen (27) lassen sich aber lediglich die bereits aus Satz 32 bekannten Ungleichungen ablesen.

II. Funktionenkörper.

§ 7.

Vielfachheit.

Unter einem *Funktionenkörper* sei im Folgenden eine endliche Erweiterung K einer einfachen, rein-transzendenten Erweiterung $k(x)$ des Körpers k der Charakteristik $p > 0$ verstanden. k wird als der *Konstantenkörper* bezeichnet, während die in K algebraisch-abge-

schlossene Hülle von k, d. h. die Gesamtheit der bez. k algebraischen Elemente von K, der *genaue Konstantenkörper* genannt wird. x läßt sich nun bekanntlich durch jedes über k transzendente Element von K ersetzen. Von einer *zur unabhängigen Variablen x gehörigen Erzeugung*

$$K = k(x; y_1, \ldots, y_m), \tag{29}$$

wollen wir sprechen, wenn m die Vielfachheit von $Kk(x)$ ist. Die y seien dann kurz als zur unabhängigen Variablen x gehörige Erzeugende des Funktionenkörpers K bezeichnet. Dann gilt nach Satz 12 und dem Ergebnis $\mathrm{Uvg}(k(x)) = \mathrm{Uvg}(k) + 1$ von Teichmüller [15, S. 370, Satz 18]

$$m \leqq \mathrm{Uvg}(k) + 1 \tag{30}$$

woraus sich speziell die bekannte Tatsache ergibt, daß über vollkommenem k jede Erzeugung (29) einfach ist. In diesem Falle kann man darüber hinaus bekanntlich noch zeigen, daß für passendes x das y separabel über $k(x)$, d. h. K separabel erzeugbar ist. Wir wollen nun versuchen, auch bei unvollkommenem k Aussagen zu gewinnen, die über (30) hinausgehen.

Fragen wir nach der Änderung von m bei Übergang zur neuen unabhängigen Variablen x', so ist wegen $K = k(x'; x, y_1, \ldots, y_m)$ die zu x' gehörige Vielfachheit $m' \leqq m + 1$, und da m, m' natürlich auch ihre Rollen tauschen können, gilt $|m - m'| \leqq 1$, d. h. m kann höchstens zwei, zudem noch unmittelbar benachbarte Werte annehmen. Den kleineren von beiden, also die Minimalzahl von Erzeugenden, nennen wir die *Vielfachheit von K bez. k*, so daß $m = 0$ charakteristisch ist für den Körper der rationalen Funktionen. Ob das m in (29) bereits diese Vielfachheit ist — in welchem Falle wir von einer *Minimalerzeugung* reden wollen. — läßt sich jedenfalls dann bejahend entscheiden, wenn eine andere unabhängige Variable x' mit $m' = m + 1$ bekannt ist. Das ist z. B. mit $m \leqq \mathrm{Uvg}(k) \geqq 1$ der Fall für

$$K_m = k(x; a_0^{p^{-1}}, \ldots, a_m^{p^{-1}}),$$

wo die a_i p-unabhängige Elemente aus k sind: Dies ist eine Erzeugung (29), da sie nach § 3 eine ausgezeichnete Erzeugung von $K_m k(x)$ darstellt. Mit $x' = x^p$ haben wir aus dem gleichen Grunde, da x' als Transzendente trivialerweise von den a_i p-unabhängig ist, die zu x' gehörige Erzeugung $K_m = k(x'; x'^{p^{-1}}, a_1^{p^{-1}}, \ldots, a_m^{p^{-1}})$, also $m' = m + 1$. Für $m = \mathrm{Uvg}(k) + 1$ können wir jedoch auf diese Art jedenfalls keinen Funktionenkörper der Vielfachheit m konstruieren. Daß dies auch allgemein unmöglich ist, zeigt

Satz 34. *Über unvollkommenem k hat jeder Funktionenkörper eine Vielfachheit* $\leqq \mathrm{Uvg}(k)$.

Mit m als Vielfachheit von K bez. k können wir $m \geqq 2$ annehmen, da für $m \leqq 1$ nichts zu beweisen ist. Nach Satz 7 sind nun die y einer Erzeugung (29) p-unabhängig in K. Wäre x von ihnen p-ab-

hängig, so ergäbe eine Überlegung wie beim Beweis von Satz 7 die Separabilität von x über $k(y_1, \ldots, y_m)$. Da, falls alle y über k algebraisch sind, $m \leqq \mathrm{Uvg}(k)$ wegen Satz 12 gilt, können wir o. B. d. A. y_1 als transzendent über k annehmen. Aus Satz 5 und $m \geqq 2$ würde dann im Widerspruch zur Definition von m die Erzeugung

$$K = k(y_1; y_2, \ldots, y_{m-1}, z)$$

folgen. Wegen $K^p(x, y_1, \ldots, y_m) = k^p(x; y_1, \ldots, y_m)$ ist also zufolge der Definition der p-Unabhängigkeit

$$(k^p(x; y_1, \ldots, y_m) : K^p) = p^{m+1}, \tag{31}$$

während aus (7), $\mathrm{Uvg}(k(x)) = \mathrm{Uvg}(k) + 1$ und Satz 11

$$(K : K^p) \leqq p^{\mathrm{Uvg}(k)+1} \tag{32}$$

folgt. Wegen $k^p(x; y_1, \ldots, y_m) \subseteq K$ ergibt der Vergleich von (31) und (32) schließlich die Behauptung $m \leqq \mathrm{Uvg}(k)$. Für maximale Vielfachheit $m = \mathrm{Uvg}(k)$ erkennen wir zugleich noch die Richtigkeit von

$$k^p(x; y_1, \ldots, y_m) = K. \tag{33}$$

Ferner zeigt wie bei Satz 7 eine genauere Betrachtung des Anfangs unseres Beweises, daß ein Funktionenkörper der Vielfachheit m bez. seines Konstantenkörpers den relativen Unvollkommenheitsgrad $m+1$ besitzt, mit alleiniger Ausnahme des separabel erzeugbaren, nichtrationalen Funktionenkörpers ($m = 1$), der — wie schon Teichmüller [15, S. 370] bemerkt hat — den relativen Unvollkommenheitsgrad 1 besitzt.

Unter gewissen Voraussetzungen ist für einen Funktionenkörper maximaler Vielfachheit jede Erzeugung (29) eine Minimalerzeugung, denn es gilt

Satz 35. *Ist $k^{p^{-1}}$ nicht in K enthalten, so ist die Erzeugendenanzahl bei jeder Wahl der unabhängigen Variablen $\geqq \mathrm{Uvg}(k)$.*

Liegt nämlich $k^{p^{-1}}$ nicht in K, so gibt es ein $a \varepsilon k$, so daß $z^{p^e} - a$ in $K[z]$ irreduzibel ist. Mit $\bar{k} = k(a^{p^{-e}})$ und $\bar{K} = K(a^{p^{-e}}) = \bar{k}(x; y_1, \ldots, y_m)$ gilt daher

$$(\bar{K} : \bar{k}(x)) = \frac{(\bar{K} : K) \cdot (K : k(x))}{(\bar{k}(x) : k(x))} = (K : k(x)). \tag{34}$$

Da wegen $\mathrm{Uvg}(k) \geqq 1$ für separabel erzeugbares K nichts bewiesen zu werden braucht, können wir $K = k(x; y, y_1, \ldots, y_m)$ setzen mit der über $k(x)$ irreduziblen Gleichung für y

$$f(y) = 0 \tag{35}$$

und — nach Satz 14 — der über $k(x; y, y_1, \ldots, y_{i-1})$ irreduziblen Gleichung für y_i ($i = 1, \ldots, m$)

$$y_i^{q_i} = f_i(y_1^{q_i}, \ldots, y_i^{q_i}{}_1) \tag{36}$$

mit $q_i = p^{e_i}$, $e_i > 0$, $f_i(z_1, \ldots, z_{i-1}) \varepsilon k(x; y)[z_1, \ldots, z_{i-1}]$. Wegen (34) bleiben nun die Gleichungen (35) und (36) irreduzibel bei Ersetzung von k durch $\bar{k}$, also, da e beliebig gewählt war, auch bei Ersetzung durch das Kompositum k^* aller $\bar{k}$ mit $e = 1, 2, \ldots$. Schreiben wir entsprechend K^* für das Kompositum aller $\bar{K}$ mit $e = 1, 2, \ldots$, so gilt mit den irreduziblen Gleichungen (35), (36) $K^* = k^*(x; y, y_1, \ldots, y_m)$. Weil dies nach Satz 14 eine ausgezeichnete Erzeugung von $K^*|k^*(x; y)$ ist, haben wir zufolge (30) $m \leqq \mathrm{Uvg}(k^*) + 1$ und dies ist nach dem in Abschnitt III zu beweisenden Satz 48 gleich $\mathrm{Uvg}(k)$.

Nehmen wir k speziell als fastvollkommen, also $\mathrm{Uvg}(k) \leqq 1$ an, so ergibt Satz 34 die einfache Erzeugbarkeit jedes Funktionenkörpers. Die Voraussetzung von Satz 35 ist bei fastvollkommenem, aber unvollkommenem k nach Satz 19 gleichbedeutend mit der Separabilität des genauen Konstantenkörpers k' über k. Wir können ferner in Erweiterung des über vollkommene Körper Bekannten zeigen

Satz 36. *Über fastvollkommenem k ist ein Funktionenkörper dann und nur dann separabel erzeugbar, wenn sein genauer Konstantenkörper separabel über k ist.*

Das „nur dann" ist trivial. Da bekanntlich jeder Funktionenkörper über vollkommenem k separabel erzeugbar ist, dürfen wir für den weiteren Beweis $\mathrm{Uvg}(k) = 1$ annehmen. Nach Satz 35 und dem oben Ausgeführten ist bei separablem $k'|k$ eine einfache Erzeugung $K = k(x; y)$ sogar bei beliebig gewählter unabhängiger Variablen x gesichert. Das irreduzible Polynom $f(z, w) \varepsilon k[z, w]$ mit $f(x, y) = 0$ ist nun aber entweder in x über $k(y)$ oder in y über $k(x)$ separabel. Denn sonst wäre es bereits Polynom in z^p und w^p, also in $\bar{k}(x)[z, w]$ mit $\bar{k} = k^{p^{-1}} = k(a^{p^{-1}})$, $a \varepsilon k - k^p$ reduzibel, woraus mit $\bar{K} = K(a^{p^{-1}}) = \bar{k}(x; y)$ ein Widerspruch zu (34) folgen würde. Bietet daher nicht schon die unabhängige Variable x eine separable Erzeugung, so erhalten wir eine solche mit der unabhängigen Variablen y. Einen wesentlich kürzeren Beweis, der zudem auch bei Übergang zu beliebigem endlichen Transzendenzgrad gültig bleibt, erhält man unter Benutzung von Theorem 14 bei Mac Lane [8]; denn eine in k p-unabhängige Menge, die ja bei $\mathrm{Uvg}(k) = 1$ aus genau einem nicht in k^p liegenden Element besteht, behält hier diese Eigenschaft in K, wenn der genaue Konstantenkörper separabel über k ist.

Satz 36 gestattet nun auch bei nichtseparablem $k'|k$ eine Minimalerzeugung anzugeben, also eine einfache Erzeugung zu finden: Mit e als Exponenten von $k'|k$ erfüllt nach der im Anschluß an Satz 13 gezogenen Folgerung K über $k^{p^{-e}} = \bar{k}$ die Voraussetzungen von Satz 35. Aus einer entsprechend dem Beweis von Satz 36 gefundenen separablen Erzeugung $K = \bar{k}(x; \bar{y})$ gewinnen wir dann nach Satz 5 ein y mit $K = k(x; y)$.

Es taucht nun die Frage auf, ob man aus der Vielfachheit eines Funktionenkörpers K auch Aussagen gewinnen kann über die Vielfachheit seines Restklassenkörpers nach einem Primdivisor $\mathfrak{p}$, also des Körpers $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$, der durch Restklassenbildung nach dem Ideal $\bar{\mathfrak{p}}$ der durch $\mathfrak{p}$ teilbaren Elemente im Ring $K_\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{p}$-ganzen Elemente entsteht und als Oberkörper des Konstantenkörpers k aufgefaßt werden kann. Bezüglich der dabei sowie im folgenden Paragraphen verwandten Begriffsbildungen aus der Verzweigungstheorie bewerteter Körper sei auf die Arbeiten von Deuring [2] und Ostrowski [9] verwiesen. In der Bezeichnung schließen wir uns dabei Deuring an. Ist nun die Vielfachheit m von K über k Null, so kann der Restklassenkörper trivialerweise nur die Vielfachheit 0 oder 1 haben. Die danach naheliegende Vermutung, daß für die Vielfachheit n des Restklassenkörpers die Ungleichung $n \leqq m+1$ gilt, bestätigt sich jedoch nicht. Wir geben nämlich ein Gegenbeispiel an, aus dem hervorgeht, daß schon bei $m = 1$ noch jedes $n \leqq \mathrm{Uvg}(k)$ möglich ist. Sind $a_1, \ldots, a_n$ $(n \leqq \mathrm{Uvg}(k))$ in k p-unabhängig, so definieren wir durch

$$y^{p^n} = a_1^{p^{n-1}} + \sum_{i=2}^{n} a_i^{p^{n-i}} x^{p^{n+i-3}} + x^{p^{2n-3}+1} \tag{37}$$

den Funktionenkörper $K = k(x; y)$. Ist $\mathfrak{p}_0$ der Zählerdivisor von x in $k(x)$, so ist in K mit $\mathfrak{p}$ als Primdivisor $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}^e$ und $(K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}} : k) = \frac{p^n}{e}$. Andererseits ist aber $(y^p - a_1)^{p^{n-1}} \equiv 0(\mathfrak{p})$, also $y^p \equiv a_1(\mathfrak{p})$, und mit $h \geqq 2$ und

$$(y^{p^{h-1}} - a_1^{p^{h-2}} - \sum_{i=2}^{h-1} a_i^{p^{h-i-1}} x^{p^{h+i-4}})\, x^{-p^{2h-4}} = y_h$$

ist

$$y_h^{p^{n-h+1}} = \sum_{i=h}^{n} a_i^{p^{n-i}} x_i^{p^{n+i-3} - p^{n+h-3}} + x^{p^{2n-3} - p^{n+h-3}+1}\, \varepsilon\, k[x],$$

woraus einmal $y_h \varepsilon K_\mathfrak{p}$, zum andern $(y_h^p - a_h)^{p^{n-h}} \equiv 0(\mathfrak{p})$, also $y_h^p \equiv 0(\mathfrak{p})$ folgt. Damit haben wir $k(a_1^{p^{-1}}, \ldots, a_n^{p^{-1}}) \subseteq K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$, also $e = 1$ und $k(a_1^{p^{-1}}, \ldots, a_n^{p^{-1}}) = K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$. Es gibt somit im Allgemeinen zu einem Primdivisor $\mathfrak{p}$ keine Erzeugung (29), deren Restklassen $\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m$ den Restklassenkörper $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$ über k erzeugen. Auf Grund unseres Beispiels braucht das selbst dann nicht der Fall zu sein, wenn die Klasse von $\mathfrak{p}$ eine Dimension $\geqq 2$ besitzt, also ein nur durch $\mathfrak{p}$ teilbares Primelement vorhanden ist. Bemerkt sei noch, daß das letzte Glied der rechten Seite in (37) nur dazu dient, k zugleich als genauen Konstantenkörper zu erhalten und zwar auf Grund von

Satz 37. *Der durch* $y^{p^n} = f(x^p) + x\, g(x^p)$ *mit* $f(z), g(z) \varepsilon k[z]$ *und* $g \neq 0$ *definierte Funktionenkörper* $K = k(x; y)$ *hat den genauen Konstantenkörper* k.

Da x transzendent über k ist, gilt $(K : k(x)) = p^n$. Wäre nun der genaue Konstantenkörper $\supset k$, so gäbe es ein $a \varepsilon k - k^p$ mit $a \varepsilon K^p$,

nach Satz 6 also mit $a^{p-1}\varepsilon k(x, y^{p^{n-1}})$. Zum Beweis unserer Behauptung genügt es daher, aus

$$a^{p-1}\sum_{k=0}^{N} b_k x^k = \sum_{i,k=0}^{p-1,N} a_{ik} x^k y^{ip^{n-1}} \quad (a_{ik},\ b_k \varepsilon k) \tag{38}$$

$a_{ik} = 0$ für $i > 0$ zu folgern. Sei dies für $i > h$ mit $0 < h < p$ bereits erfolgt. Potenzieren von (38) mit p muß nun auf der rechten Seite ebenfalls ein Polynom nur in x^p geben, so daß der sich für x^h ergebende, in $k(x^p)$ liegende Koeffizient verschwindet. Da in diesem nur Glieder mit $i = h$ auftreten, bedeutet das $\sum_{k=0}^{N} a_{hk}^p x^{kp} = 0$, also auch $a_{hk} = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Die aus unserem Gegenbeispiel gezogene Folgerung ergibt noch die Fehlerhaftigkeit des vom Verfasser in [10, S. 272] formulierten Satzes 2: Beim Beweis ist wesentlich die Existenz einer Erzeugung mit $k(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$ als Restklassenkörper benutzt, wobei L, K statt der hier verwendeten Buchstaben K, k auftreten. Im weiteren Verlauf des Beweises (S. 273, Mitte) findet sich außerdem noch ein weiterer Fehler, denn das Ideal der dort eingeführten inseparablen Polynome F, F_i ergibt durch Restklassenbildung aus $k[x, y_1, \ldots, y_m]$ i. a. nicht den Restklassenkörper $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$ sondern eine Algebra. In der Tat gibt es denn auch ein Beispiel, wo trotz $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}} = k(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$ und der Vielfachheit $m+1$ dieses Restklassenkörpers der Restklassenring des Funktionenkörpers nach $\mathfrak{p}^r$, d. h. $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}^r$, nicht der ersten Typenklasse angehört: Wir bilden mit $k = P_p(u, v)$, $p > 2$ und $y^{p^2} = u^p + (x^p - v)^2$ den Funktionenkörper $K = k(x; y)$, in dem der Zähler von $x^p - v$ die Primdivisorzerlegung $\mathfrak{p}^p$ besitzt. Dann ist $x^p \equiv v\,(\mathfrak{p}^p)$ und $y^p \equiv u\,(\mathfrak{p}^2)$, also $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}} = k(u^{p-1}, v^{p-1}) = k(\bar{x}, \bar{y})$. In der Algebra $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}^r\ (r > 1)$ gibt es daher für die Restklassen nach dem Radikal $\mathfrak{w}$ ein mod $\mathfrak{w}^2$ relationstreues Repräsentantensystem. Nach Definition (a. a. O., S. 266) bedeutet das aber: Die Algebra gehört nicht zur ersten Typenklasse.

Der nachfolgende Satz 3 bleibt bestehen (a. a. O., S. 274):

Eine primäre Algebra vom Defekt δ und Inseparabilitätsrang λ ist dann und nur dann Polynomrestklassenring, wenn $\delta \leqq 1$, $\lambda \leqq 1$ und im Falle $\delta = 1$, $\lambda = 1$ die Algebra der ersten Typenklasse angehört.

Den Beweis führen wir nun so: Ist $m = 0$, also $K = k(x)$, so ergibt sich $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$, jenachdem $\mathfrak{p}$ der Zähler eines separablen oder inseparablen Polynoms $f(x)$ aus $k[x]$ ist. Im ersten Fall liegt trivialerweise die Grundalgebra (a. a. O., S. 268) vor. Im zweiten Fall gehört die entstehende Algebra für $\delta = 1$, also $r > 1$, der ersten Typenklasse an. Denn mit $f = g(x^q)$, $q = p^e$, g separabel aus $k[x]$, bestimmt sich der Repräsentant für ein α_1 (Bezeichnung wie a. a. O., S. 236) zu $x^q + f(x)F(x)$ aus der Bedingung $g(x^q + f(x)F(x)) \equiv 0\,(f(x)^r)$. Wegen $r > 1$ folgt daraus $1 + g'(x^q)F(x) \equiv 0\,(f(x))$, also $F(x) \not\equiv 0\,(f(x))$. Da x als Repräsentant für α_1 betrachtet werden kann, ist $-f(x)F(x)$ Repräsen-

tant für $f_1(a_1)$. Dieses liegt also nicht im Radikalquadrat, w. z. b. w. D für $\delta = 1$, $\lambda = 1$ alle Algebren der ersten Typenklasse mit gleiche Radikalrestklassenkörper und gleichem Index r isomorph sind (a. a. C S. 269, Satz 2), ist damit auch gezeigt, daß eine derartige Algebr Polynomrestklassenring ist.

§ 8.

Primdivisorzerlegung bei Konstantenerweiterung.

Eine Bewertung, also ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ eines Körpers K besitz bekanntlich in einer endlichen Erweiterung $L|K$ eine endliche Anzahl von Fortsetzungen $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$, eine Tatsache, die mit gewissen Ex ponenten e_i durch die Divisorenbeziehung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{P}_s^{e_s} \tag{39}$$

ausgedrückt wird. Die $\mathfrak{P}_i$ werden am einfachsten konstruiert durc Übergang von K zu einer perfekten Hülle $\bar{K}$ bez. $\mathfrak{p}$. Mit der Be zeichnung von Seite 22 oben bildet man

$$L_{\bar{K}} = \bar{K}_L' \dotplus \bar{K}_L'' \dotplus \cdots \dotplus \bar{K}_L^{(g)},$$

und die aus $\mathfrak{p}$ hervorgehende Bewertung des perfekten Körpers $\bar{K}_i \cong$ liefert dann genau eine Fortsetzung auf den zum Radikalrestklassen körper von $\bar{K}_L^{(i)}$ isomorphen Körper $L\bar{K}_i$, die wir mit $\mathfrak{P}_i$ bezeichnen Der Grad f_i^* des Körpers

$$L_{\mathfrak{P}_i}/\bar{\mathfrak{P}}_i \cong L_\mathfrak{p}/\mathfrak{P}_i^* \tag{40}$$

als Oberkörper von $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$ wird als *Relativgrad* von $\mathfrak{P}_i$ bezeichnet. Da bei bedeutet $L_\mathfrak{p}$ den Ring der von $K_\mathfrak{p}$ ganz-abhängigen Elemente vo L und $\mathfrak{P}_i^* = \bar{\mathfrak{P}}_i \cap L_\mathfrak{p}$ das Ideal der durch $\mathfrak{P}_i$ teilbaren Elemente diese Ringes. Dann existiert die p-Potenz $\delta_2^{(i)}$, der *zweite Defekt* [9, S. 360 von $\mathfrak{P}_i$, so daß

$$(L\bar{K}_i : \bar{K}_i) = \delta_2^{(i)} e_i f_i^* \tag{41}$$

gilt. Andererseits ist nach unsern Entwicklungen in § 4 der Quotien der Ränge $(\bar{K}_L^{(i)} : \bar{K}_i)$ und $(L\bar{K}_i : \bar{K}_i)$ eine p-Potenz $\delta_1^{(i)}$, die man de *ersten Defekt* [9, S. 308] von $\mathfrak{P}_i$ nennt. Mit (41) ist also

$$(L:K) = \sum_{i=1}^{s} \delta_1^{(i)} \delta_2^{(i)} e_i f_i^* \tag{42}$$

Bei diskreter Bewertung, also endlicher Maximalordnung $K_\mathfrak{p}$ — ei Fall, der insbesondere bei Funktionenkörpern vorliegt — ist nun imme $\delta_2 = 1$, wie man etwa aus Hilfssatz 4 bei TEICHMÜLLER [16, S. 14 entnimmt. Der erste Defekt kann nach Definition nur bei inseparable $L\,K$ größer als 1 sein. Für den uns hier allein interessierenden Fa gilt aber

Satz 38. *Bei Funktionenkörpern ist der erste Defekt gleich* 1. Dieser Satz ist nicht neu: Er ist ja nur eine Teilaussage des Ergebnisses von F. K. Schmidt [13], daß bei Funktionenkörpern neben die Divisorenbeziehung (39) die Primidealzerlegung

$$\bar{\mathfrak{p}}\, L_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{P}_1^{*e_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{P}_s^{*e_s} \tag{43}$$

ritt, aus der (42) in der Form

$$(L:K) = \sum_{i=1}^{s} e_i f_i^* \tag{44}$$

abzulesen ist. Wir wollen aber hier den Satz 38 direkt im Rahmen unserer Untersuchungen über inseparable Erweiterungen beweisen. Offenbar genügt es, $K = k(x)$ und $\mathfrak{p}$ als den Zählerdivisor von x zu nehmen. Wir brauchen dann nur noch zu zeigen, daß für jeden Körper $M = K(y_1, \ldots, y_m) \subset \bar{K} = k\{x\}$ und eine algebraische Erweiterung $L|K$ die Algebra L_M halbeinfach ist. Nun bleibt mit B_0 als p-Basis von k die p-Basis $B = B_0 + \{x\}$ von K in $\bar{K}$ und damit in M p-unabhängig; denn $x \varepsilon \bar{K}^p(B_0) \subseteq k\{x^p\}$ ist genau so unmöglich wie mit $B_0 = \{b\} + B'$ die Beziehung $b \varepsilon \bar{K}^p(x, B') \subseteq k^p(B')\{x\}$, aus der ja $b \varepsilon k(B')$ folgen würde. Daher kann B zu einer p-Basis $B + X$ von M ergänzt werden. Da $K(X_i)$ $(i = 1, 2)$ mit $X_1 \subset X_2 \subseteq X$ die p-Basis $B + X_i$ hat, ist nach Satz 8 und wegen des Erhaltenbleibens der p-Basis bei separabler Erweiterung $K(X_2)|K(X_1)$ nicht algebraisch, also X algebraisch unabhängig über K und somit zu einer Transzendenzbasis $X + Y$ von $M|K$ ergänzbar. Wegen der Endlichkeit von $M|K(X+Y)$ gibt es dann ein e, so daß jedes Element von M^{p^e} und wegen (6) daher auch M separabel über $K(X+Y)$ ist. Nebenbei folgt daraus noch $Y = 0$, da ja $B + X + Y$ p-Basis von M ist. Die Existenz der damit gewonnenen separierenden Transzendenzbasis X für $M|K$ kann auch aus dem Theorem 14 bei Mac Lane [8] gefolgert werden. Nun ist trivialerweise $L_{K(X)}$ ein Körper und daher L_M wegen der Separabilität von $M|K(X)$ halbeinfach, w. z. b. w.

Wesentlich für die Gültigkeit von Satz 38 ist nun, daß wir unter „Funktionenkörper“ nur Erweiterungen vom Transzendenzgrad 1 verstehen. Selbst beim Körper $K = k(x, y)$ der rationalen Funktionen zweier Variablen und einer zu $L = k'(x, y)$ führenden Konstantenerweiterung $k'|k$ können wir bei unvollkommenem k einen Primdivisor mit $\delta_1 > 1$ angeben. Zu diesem Zweck nehmen wir auf einer Bemerkung Deurings fußend in $k\{x\}$ ein über $k(x)$ transzendentes Element z. Die Existenz eines solchen folgt aus einem Satz von F. K. Schmidt [12, S. 23] über Potenzreihen mit Lücken oder auch aus unserm in Abschnitt III zu beweisenden Satz 54. In der mit $a \varepsilon k - k^p$ gebildeten Erweiterung $\bar{K} = k(a^{p^{-1}})\{x\}$ ist nun $a^{p^{-1}} + z$ ebenfalls transzendent über $k(x)$, weshalb wir durch Identifizierung dieses Elementes mit y den Körper $k(x, y)$ in $\bar{K}$ einbetten können. Die natürliche Exponentenbewertung von $\bar{K}$

durch den kleinsten mit nichtverschwindendem Koeffizienten in einer Potenzreihe auftretenden Exponenten ergibt nun in dem Unterkörper $k(x, y)$ den gewünschten Primdivisor $\mathfrak{p}$, wenn wir noch $k' = k(a^{p^{-1}})$ setzen. $\overline{K}$ ist nämlich — wie sofort einzusehen — die perfekte Hülle von $k(x, y) = K$, so daß $\delta_1 = p$ gilt.

Wir gehen jetzt speziell zu solchen endlichen Erweiterungen eines Funktionenkörpers K über, die sich durch Erweiterung k' des Konstantenkörpers k herstellen lassen. Dabei sei k zugleich der genaue Konstantenkörper. Dann gilt

Satz 39. *$K_{k'(x)} = k'_K$ ist primäre Algebra und bei einfachem $k'|k$ ein Körper.*

Nach den Entwicklungen von § 4 genügt es, den zweiten Teil dieser Behauptung zu beweisen. Ist nun $k' \cong k[z]/(f(z))$ und in $K[z]$ $f(z) = F(z)\,G(z)$, so sind die Koeffizienten von F und G algebraisch über k, liegen daher bereits in k. $f(z)$ ist also auch in $K[z]$ irreduzibel und daher $k'_K \cong K[z]/(f(z))$ ein Körper.

Da entsprechend dem Beweis von Satz 22 die Algebra k'_K homomorph auf jedes Kompositum von k' und K abgebildet wird und daher nach Satz 39 jedes Kompositum isomorph zum Radikalrestklassenkörper von k'_K ist, wird dieser mit Kk' bezeichnet und *der aus K durch die Konstantenerweiterung $k'|k$ hervorgehende Funktionenkörper* genannt. $L = Kk'$ hat nun nicht immer den genauen Konstantenkörper k'. Wir brauchen z. B. nur $k = P_p(u, v)$, $K = k(x; y)$, $y^p = u\,x^p + v$ und $k' = k(u^{p^{-1}})$ zu setzen. Daß k der genaue Konstantenkörper von K ist, ergibt sich, weil jede Konstante in $k^{p^{-1}}$ liegt, aus der nach den Entwicklungen von S. 95 unten für den Grundkörper $k(x^p)$ und $w = x^p$ geltenden Beziehung $k^{p^{-1}}(x^p) \cap K = k(x^p)$. $L = Kk'$ aber enthält die nicht zu k' gehörende Konstante $y - x\,u^{p^{-1}}$. Das ist auch der Grund, weshalb beim Übergang zu $k'' = k^{p^{-1}}$ — anders als bei einer einfachen Konstantenerweiterung — k''_K ein Radikal $\neq 0$ hat. Die Voraussetzung der Einfachheit ist also nicht überflüssig. Bezüglich des genauen Konstantenkörpers gilt aber

Satz 40. *Bei separablem $k'|k$ ist k' der genaue Konstantenkörper von Kk'.*

Wir beweisen diesen Satz auch für unendliche algebraische Erweiterungen $k'|k$, für die die Betrachtungen von Satz 39 ja ebenfalls gültig bleiben. Eine Konstante c von Kk' ist wegen der Separabilität von $k'|k$ enthalten in $Kk(a)$ mit einem in k' liegenden separablen Element a, und es gilt $k(a, c) = k(b) \supseteq k(a)$. Da aber $Kk(b) = Kk(a)$ ist, liefert Satz 39 die Gradbeziehung $(k(a) : k) = (Kk(a) : K) = (Kk(b) : K) = (k(b) : k)$, also $k(a) = k(b)$, $c \in k'$, w. z. b. w.

Mit $(k' : k) = n$ gibt es nun nach den Entwicklungen von § 4 eine p-Potenz r, so daß

$$(L : K) = \frac{n}{r} \tag{45}$$

gilt. Nach Satz 39 ist bei einfachem $k'|k$ stets $r = 1$. Falls wir wie üblich $(K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}} : k) = f$, $(L_{\mathfrak{P}_i}/\bar{\mathfrak{P}}_i : k') = f_i$ als die *Grade* der Primdivisoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}_i$ einführen, also

$$n f_i = f_i^* f \tag{46}$$

haben, gilt betreffs der Zerlegung (39) der

Satz 41. *Bei separablem $k'|k$ ist ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ aus K in $L = Kk'$ Produkt von lauter verschiedenen Primdivisoren, die unter Übereinstimmung der jeweiligen Grade bez. k' den einfachen Komponenten von $K_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}} \times k'$ entsprechen.*

Zum Beweis benutzen wir eine normale, separable, $k' = k(a)$ umfassende Erweiterung $k^*|k$. Ein Element $z \varepsilon L$ läßt sich nun immer in der Form $z = \sum_{i=0}^{n-1} y_i a^i$ $(y_i \varepsilon K)$ darstellen. Anwendung der durch $a \to a^{(i)}$ $(i = 0, \ldots, n-1;\ a^{(0)} = a)$ beschriebenen Isomorphismen liefert daraus in $Kk^* \supseteq L$ die Beziehungen $z^{(k)} = \sum_{i=0}^{n-1} y_i a^{(k)i}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$, also wegen $|a^{(k)i}|_{(i,k=0,\ldots,n-1)} \neq 0$ die y_i als ganz-rationale Funktionen der $z^{(k)}$. Da diese aber mit z zusammen ganz-abhängig von $K_\mathfrak{p}$ sind, trifft dasselbe auch für die y_i zu, die dann als Elemente von K sogar in $K_\mathfrak{p}$ liegen müssen. Es gilt also

$$L_\mathfrak{p} = K_\mathfrak{p} k', \tag{47}$$

wo die rechte Seite das in L gebildete Ringkompositum von $K_\mathfrak{p}$ und k' bezeichnet. Aus (47) folgt nun durch Restklassenbildung mod $\bar{\mathfrak{p}} L_\mathfrak{p}$ wegen der linearen Unabhängigkeit der Elemente $1, a, \ldots, a^{n-1}$ über K sofort

$$L_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}} L_\mathfrak{p} \cong \bar{k} \times k', \tag{48}$$

wenn mit $\bar{k}$ der als Erweiterung von k aufgefaßte Körper $K_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ bezeichnet wird. Die Halbeinfachheit von $\bar{k} \times k'$ zusammen mit (40) und (43) ergibt dann die Behauptung. Es liegt nun die Vermutung nahe daß (47) allgemein gilt, woraus dann wenigstens für $r = 1$ (48) folgen würde. Bezeichnen wir die Ränge über k' der Primärkomponenten von $\bar{k} \times k'$ und ihrer Radikalrestklassenkörper mit g_i bzw. h_i, so würde unsere Vermutung für $r = 1$ bedeuten, daß

$$e_i = \frac{g_i}{h_i}, \quad f_i = h_i \tag{49}$$

sein müßte. Alle Primärkomponenten hätten zudem den Defekt 1 (s. S. 103). Daß dies i. a. falsch ist, erkennen wir aus dem Beispiel von Seite 41, wenn wir etwa $k' = k^{p^{-1}}$ setzen: Es ist $r = 1$, doch hat nach Satz 25 $\bar{k} \times k'$ den Defekt n. Aber auch bei Defekt 1 braucht (49) nicht erfüllt zu sein. Bilden wir nämlich mit $k = P_p(u, v)$ den Funktionenkörper $K = k(x; y)$, $y^p = (v + x)x^p + u$, der nach Satz 37 den genauen Konstantenkörper k besitzt, so ist mit $k' = k(u^{p^{-1}})$

$$L = k'(x, z), \quad z^p = v + x, \quad z = \frac{y - u^{p^{-1}}}{x}.$$

Der Zählerdivisor von x ist also sowohl in K wie in L Primdivisor: $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}$. Wegen $\bar{k} = k(u^{p^{r-1}})$ ist aber $\bar{k} \times k'$ kein Körper. Für den Restklassenkörper $\bar{k}' = L_{\mathfrak{P}}/\bar{\mathfrak{P}}$ gilt entgegen (48) $\bar{k}' = k'(v^{p^{r-1}}) \supset \bar{k}k'$. Für $r > 1$ ist (49) in jedem Fall falsch, denn (44), (45), (46) ergeben

$$r \sum_{i=1}^{n} e_i f_i = f. \tag{50}$$

Bemerkt sei noch, daß bei $r = 1$ (48) durchaus erfüllt sein kann, ohne daß (47) gilt: Mit dem gleichen k wie oben bilden wir den Funktionenkörper $K = k(x; y)$, $y^p = u + x^{p+1}$, der wieder nach Satz 37 den genauen Konstantenkörper k besitzt. Mit $k' = k(u^{p^{r-1}})$ und $z = (u^{p^{r-1}} - y)\, x^{-1}$ ist dann $L = k'(z)$, $z^p = x$. Daher ist der in K leicht als Primdivisor zu erkennende Zählerdivisor $\mathfrak{p}$ von x in L eine p-te Potenz: $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^p$. Deshalb ist $L_{\mathfrak{p}}/\bar{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}} \cong \sum_{i=0}^{p-1} k' w^i$ $(w^p = 0)$ und dasselbe gilt für $\bar{k} \times k'$. (48) ist also erfüllt, aber, da z zwar in $L_{\mathfrak{p}}$, jedoch — weil $y x^{-1}$ nicht in $K_{\mathfrak{p}}$ — nicht in $K_{\mathfrak{p}} k'$ liegt, ist (47) falsch. Dabei ist die Isomorphie (48) durchaus nichttrivial, d. h. sie beruht nicht einfach darauf, daß die Restklassen von $K_{\mathfrak{p}} k'$ modulo dem Erweiterungsideal von $\bar{\mathfrak{p}}$ beim Übergang zum umfassenderen Ring $L_{\mathfrak{p}}$ inkongruent bleiben und nur durch Elemente von $L_{\mathfrak{p}}$ vergrößert werden, denn z. B. sind ja die in $K_{\mathfrak{p}} k'$ inkongruenten Elemente $u^{p^{r-1}}$ und y in $L_{\mathfrak{p}}$ kongruent. Deshalb kann wegen (48) auch nicht jedes Element von $L_{\mathfrak{p}}$ zu einem Element von $K_{\mathfrak{p}} k'$ kongruent sein, da eine Algebra von endlichem Rang niemals isomorph zu einer echten Unteralgebra ist.

Im inseparablen Fall liegen also gänzlich andere Verhältnisse vor als im separablen. Wir können über den Zusammenhang von $\bar{k} \times k'$ mit der Zerlegung (39) allgemein nur aussagen

Satz 42. *Bei endlichem $k'|k$ entsprechen die verschiedenen Primdivisoren $\mathfrak{P}_i$, in die ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ aus K in $L = Kk'$ zerlegt wird, den primären Komponenten von $K_{\mathfrak{p}}/\bar{\mathfrak{p}} \times k'$, wobei $L_{\mathfrak{P}_i}/\bar{\mathfrak{P}}_i$ rein-inseparable Erweiterung des Radikalrestklassenkörpers der entsprechenden Primärkomponente ist. Zwischen den Rängen g_i, h_i dieser Primärkomponenten bzw. ihrer Radikalrestklassenkörper über k' und den Exponenten e_i und Graden f_i der $\mathfrak{P}_i$ bestehen die Beziehungen*

$$r e_i f_i = g_i \tag{51}$$

$$f_i \geqq h_i \tag{52}$$

$$e_i \leqq \frac{g_i}{h_i r}. \tag{53}$$

Zum Beweis beachten wir, daß die Behauptungen für separable Konstantenerweiterung auf Grund von Satz 41 jedenfalls richtig sind. Bei weiterer rein-inseparabler Konstantenerweiterung verändern nur die einzelnen Komponenten von $K_{\mathfrak{p}}/\bar{\mathfrak{p}} \times k'$ ihre Struktur: Ihre Anzahl sowie

die g_i bleiben unverändert. Wir beweisen nun den Satz durch vollständige Induktion nach m, wobei p^m der Inseparabilitätsgrad (s. S. 85) von $k'|k$ sei. Dabei kann (53) als einfache Folge von (51) und (52) unberücksichtigt bleiben. Für $m \geqq 1$ gibt es einen Zwischenkörper k_0 mit $k' = k_0(a)$, $a^p = \alpha \varepsilon k_0 - k_0^p$, auf den also die Induktionsvoraussetzung zutrifft. Der Funktionenkörper $L_0 = K k_0$ wird dann allerdings nicht immer k_0 als genauen Konstantenkörper besitzen. Den i-ten Primdivisor von L_0, der in der Zerlegung von $\mathfrak{p}$ auftritt, bezeichnen wir unter Unterdrückung des Index i mit $\mathfrak{P}_0$, Grad und Exponent entsprechend mit f_0, e_0, seinen Restklassenkörper mit $\bar{k}_0$, den Radikalrestklassenkörper der entsprechenden i-ten Primärkomponente von $\bar{k} \times k_0$ mit k_0^* und dessen Grad über k_0 mit h_0. Bei der Konstantenerweiterung $k' k_0$ gilt nach der allgemeinen Verzweigungstheorie $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}^{e^*}$ in $L = L_0 k'$. Die Zuordnung der Primdivisoren der Zerlegung von $\mathfrak{p}$ zu den Primärkomponenten von $\bar{k} \times k'$ überträgt sich also auch auf L. Wir bezeichnen nun mit f den Grad von $\mathfrak{P}$, mit e seinen Exponenten in der Zerlegung von $\mathfrak{p}$, seinen Restklassenkörper mit $\bar{k}'$, den Radikalrestklassenkörper der Primärkomponente mit k^* und dessen Grad über k' mit h. Mit $(L_0 : K) = (k_0 : k) r_0^{-1}$ ergibt sich nun nach (44) und (45) für den Relativgrad $f^* = (\bar{k}' : \bar{k}_0) = \frac{r_0 p}{r e^*} = \frac{p r_0 e_0}{r e}$, also nach (46) $pf = \frac{p r_0 e_0 f_0}{r e}$, d. h. (51) ist auch für k' richtig. Da f^* offenbar nur die Werte 1 oder p annehmen kann, ist nur $f = f_0$ oder $f = f_0 p^{-1}$ möglich. Wegen $h \leqq h_0$ ist im Falle $f_0 > h_0$ — also, da $\bar{k}_0 | k_0^*$ rein-inseparabel ist, $f_0 p^{-1} \geqq h_0$ — (52) auch für k' richtig. Im Falle $f_0 = h_0$, also $\bar{k}_0 = k_0^*$, müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen. Liegt α nicht in $\bar{k}_0^p$, so muß wegen $(\bar{k}' : \bar{k}_0) = (\bar{k}' : \bar{k}_0 k') p$ der Relativgrad $f^* = p$, also $f = f_0$ sein. Liegt aber α in $\bar{k}_0^p$, so haben wir $k^* = k_0^* k' = \bar{k}_0 k' = k_0^*$, also $h = h_0 p^{-1}$. In beiden Fällen ergibt sich die Gültigkeit von (52) auch für k'. Da schließlich $\bar{k}' \bar{k}_0^*$ rein-inseparabel ist, gilt dasselbe auch für $\bar{k}' | k_0^*$ und damit wegen $\bar{k}' \supseteq k'$ auch für $\bar{k}' | k^*$. Damit ist der Induktionsbeweis erbracht.

Als Anwendung dieses Satzes betrachten wir den Fall, daß eine Primärkomponente von $\bar{k} \times k'$ ein Körper ist. Dann ist also für den entsprechenden Index $g_i = h_i$, d. h. nach (53) $r = 1$, $e_i = 1$ und nach (51) $f_i = g_i$. Es ist somit für die betreffende Komponente $k^* = \bar{k}'$. Mit k_0 als m. s. Zk. von $k' | k$ ist aber k^* das direkte Produkt der als Algebren über k_0 aufgefaßten Körper $\bar{k}_0$ und k'. Daher ist eine Basis $a_1, \ldots, a_m$ von $k' | k_0$ auch eine Körperbasis von $\bar{k}'$ über $\bar{k}_0$, d. h. aus $\sum y_i a_i \equiv 0 (\mathfrak{P})$ mit $y_i \varepsilon L_0 \mathfrak{P}_0$ folgt $y_i \equiv 0 (\mathfrak{P}_0)$. Dabei seien die Bezeichnungen $\mathfrak{P}_0$, L_0 und $\bar{k}_0$ genau so verwandt, wie beim Beweis von Satz 42, nur daß eben der Körper k_0, auf den sie sich beziehen, ein anderer ist. Irgend ein Element von $L_{\mathfrak{P}}$ läßt sich nun in der

Form $y^{-1}\sum y_i a_i$ darstellen, wobei man noch erreichen kann, daß die in $L_0\mathfrak{P}_0$ liegenden y, y_i nicht sämtlich durch $\mathfrak{P}_0$ teilbar sind. Nach dem eben Hergeleiteten kann also in unserm Falle y nicht durch $\mathfrak{P}_0$ teilbar sein, d. h. $y^{-1}y_i$ liegt in $L_0\mathfrak{P}_0$, und wir haben $L_\mathfrak{P} = L_0\mathfrak{P}_0 k'$. Mit diesem Ergebnis beweisen wir nun

Satz 43. *Die Halbeinfachheit von $\bar{k} \asymp k'$ ist hinreichend aber nicht notwendig für das Bestehen der Beziehungen* (47), (48).

Ist nämlich $\bar{k} \asymp k'$ halbeinfach, so gilt für jedes $i = 1, \ldots, s$ nach dem eben Bewiesenen $L_{\mathfrak{P}_i} = L_{0\mathfrak{P}_{0i}} k'$. Da ferner $r = 1$ ist, sind mit $a_1, \ldots, a_m$ als k_0-Basis von k' in der Darstellung $z = \sum y_i a_i$ $(y_i \varepsilon L_0)$ eines Elementes von L die y_i eindeutig bestimmt. Aus $z \varepsilon L_\mathfrak{p} \subseteq L_{\mathfrak{P}_i}$ folgt daher $y_i \varepsilon L_{0\mathfrak{P}_{0i}}$ $(i = 1, \ldots, s)$, also [2, S. 237, Satz 4] $y_i \varepsilon L_{0\mathfrak{p}}$, womit wegen der Gültigkeit von (47) für $k_0 | k$ (47) auch für $k' | k$ bewiesen ist. Wegen $r = 1$ ist dann auch (48) erfüllt. Um Satz 43 vollständig zu beweisen, brauchen wir nur noch ein Beispiel anzugeben, bei dem (47), (48) erfüllt sind, ohne daß $\bar{k} \asymp k'$ halbeinfach ist. Mit der einfachen transzendenten Erweiterung $k = P_p(u)$ bilden wir den Funktionenkörper $K = k(x; y)$, $y^p = x + u$, der als $k(y)$ den genauen Konstantenkörper k besitzt, und setzen $k' = k(a)$, $a^p = u$, woraus sich $L = k'(x; x^{p^{-1}})$ ergibt. Der leicht als Primdivisor von K erkennbare Zählerdivisor von x besitzt daher in L die Zerlegung $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^p$. Wegen $\bar{k} = k(u^{p^{-1}})$ hat $\bar{k} \asymp k'$ ein nichtverschwindendes Radikal. $L_\mathfrak{p} = L_\mathfrak{P}$ besteht aus allen $\frac{f(y)}{g(y)}$ mit $f(y), g(y) \varepsilon k'[y]$, $g(a) \neq 0$. Dieser Ausdruck läßt sich umformen zu

$$\frac{f(y)\,g(y)^{p-1}}{g^p(x+u)} = G(x)^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} F_i(x, y)\, a^i,$$

worin G und F_i Polynome mit Koeffizienten aus k sind und $G(0) \neq 0$ ist. Also ist (47) erfüllt und wegen $r = 1$ daher auch (48).

Als weitere Anwendung von Satz 42 erwähnen wir noch, daß bei maximaler Zerfällung des Primdivisors — also $f_1 = \cdots = f_s = 1$, was durch passende Wahl von k' immer erreicht werden kann — k' Zerfällungskörper von $\bar{k}$ ist; denn aus (52) folgt $h_i = 1$. Das Umgekehrte gilt jedoch i. a. nicht, wie das Beispiel von S. 119 unten zeigt. Zum Schluß sei noch hervorgehoben, daß i. a. durchaus kein Zusammenhang zwischen den e_i und den Indizes ϱ_i der Primärkomponenten von $\bar{k} \asymp k'$ besteht: Die Algebrentheorie liefert ja nur die Abschätzung $\varrho_i \leqq \frac{g_i}{h_i}$ und (53) ebenfalls nur eine obere Schranke für e_i. In der Tat ist auch nicht nur $e_i < \varrho_i$ (siehe das Beispiel S. 119 unten!) sondern auch $> \varrho_i$ möglich, wie für genügend umfassende Konstantenerweiterung der mit $n = 2$ nach (37) konstruierte Körper auf Grund von (24) und (50) zeigt.

III. Unendliche Erweiterungen.

§ 9.

Rein-unendliche Erweiterungen.

Der am einfachsten zu überblickende Typ unendlicher, rein-inseparabler Erweiterungen entsteht offenbar durch Adjunktion sämtlicher p^n-ter Wurzeln ($n = 1, 2, \ldots$) aus den Elementen einer gewissen Menge $M \subset K$ zum Körper K. O. B. d. A. können wir dabei $M \cap K^p = 0$, also $M \subseteq K - K^p$ annehmen. Die so durch M bestimmte Erweiterung schreiben wir $K_{(M)}$ und nennen sie *rein-unendlich*. Verschiedentlich, z. B. in [7] und [8], findet man hierfür auch die Bezeichnung $K(M^{p^{-\infty}})$. Ist $M = \{a_1, a_2, \ldots\}$, so wollen wir statt $K_{(M)}$ auch $K_{(a_1, a_2, \ldots)}$ schreiben. Mit B als p-Basis von K ist $K_{(B)}$ der kleinste vollkommene Oberkörper von K, wie sofort aus Gleichung (6) folgt. Ferner gilt (zur Bezeichnung siehe S. 88)

Satz 44. *Eine rein-unendliche Erweiterung ist relativ vollkommen.*

Denn mit $L = K_{(M)}$ ist $M^{p^{-n}} \subseteq L^p$, also $L = K L^p = L^p(B)$, wenn B p-Basis von K ist. Wie bei relativ vollkommenen Erweiterungen stets läßt sich also aus jeder p-Basis von K eine Teilmenge auswählen, die p-Basis von L ist. Dabei ist zu beachten, daß zwei verschiedene rein-unendliche Erweiterungen von K durchaus dieselbe in K liegende p-Basis besitzen können; z. B. haben $P_p(u, v)_{(uv)}$ und $P_p(u, v)_{(u)}$ beide die p-Basis $\{v\}$.

Wir definieren ferner bei einer rein-inseparablen Erweiterung $L|K$: Gibt es zu dem Element $a \varepsilon K - K^p$ ein n so, daß $a^{p^{-n}} \varepsilon L - L^p$ gilt, so heißt n der *Erweiterungsexponent* von a bez. L. $K_{(M)}$ kann dann auch charakterisiert werden als kleinste rein-inseparable Erweiterung von K, bez. derer kein Element von M einen Erweiterungsexponenten besitzt. Die Frage nach der einfachsten Erzeugung einer rein-unendlichen Erweiterung legt es nun nahe, den folgenden Abhängigkeitsbegriff einzuführen:

$a \varepsilon K - K^p$ heißt *U-abhängig* von der Menge $M \subseteq K - K^p$, wenn für eine endliche Menge $N \subseteq M$

$$K_{(a)} \subseteq K_{(N)} \tag{54}$$

gilt.

Dieser Begriff genügt nun den vier Abhängigkeitsaxiomen (s. S. 87), wobei die Gültigkeit von I, II und IV ohne weiteres einzusehen ist. Für I ist dabei wesentlich, daß in (54) die endliche Teilmenge N statt der Menge M vorkommt: Ist nämlich mit vollkommenem k und darüber algebraisch-unabhängigen $x, x_1, \ldots$ $K = k(x, x_1, \ldots)$ und

$$M = \{x x_1^p,\ x x_2^{p^2}, \ldots\},$$

so gilt zwar $K_{(x)} \subseteq K_{(M)}$, jedoch ist mit

$$N = \{x x_1^p, \ldots,\ x x_n^{p^n}\}$$

$K_{(x)}$ nicht in $K_{(N)}$ enthalten; sonst wäre nämlich schon $k(x, x_1, .., x_n)_{(N)}$ vollkommen, was wegen $\mathrm{Uvg}(k(x, .., x_n)) = n+1$ und dem später zu beweisenden Satz 49 unmöglich ist. Der Grund für diese Erscheinung liegt darin, daß (54) ja eine unendliche Anzahl von Gleichungen repräsentiert. Zum Beweis von III setzen wir $\{a_1, \ldots, a_n\} = M$ und $K_{(M)} = L$. Wenn b U-abhängig von $\{a\} + M$, aber U-unabhängig von M ist, so muß wegen II und IV auch a U-unabhängig von M sein, also einen Erweiterungsexponenten m bez. L besitzen: $a' = a^{p^{-m}} \varepsilon L - L^p$. b besitzt ebenso einen Erweiterungsexponenten n bez. L: $b' = b^{p^{-n}} \varepsilon L - L^p$, und die U-Abhängigkeit von des b von $\{a\} + M$ ergibt die U-Abhängigkeit des b' von a' in L. Umgekehrt folgt aus der U-Abhängigkeit einer solchen Wurzel a' von einer solchen b' in $L - L^p$ die U-Abhängigkeit des a von $\{b\} + M$ im K. Die daher allein noch nachzuweisende Vertauschbarkeit von a' und b' in der Abhängigkeitsaussage ergibt sich nun aus

Satz 45. *Die U-Abhängigkeit des Elementes a von dem Element b aus $K - K^p$ ist gleichbedeutend mit den Beziehungen*

$$K^{p^n}(a) = K^{p^n}(b) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Daß diese Beziehungen die U-Abhängigkeit zur Folge haben, ist trivial. Umgekehrt folgt aus der U-Abhängigkeit $a^{p^{-n}} \varepsilon K(b^{p^{-m_n}})$. Wegen $a \varepsilon K^p$ ist aber $(K(a^{p^{-n}}) : K) = p^n$, also nach Satz 6 — da b nicht in K^p liegt — $K(a^{p^{-n}}) = K(b^{p^{-m}})$, w. z. b. w.

Den Zusammenhang von U-Abhängigkeit und p-Abhängigkeit stellt her

Satz 46. *Aus der p-Unabhängigkeit einer Menge folgt auch ihre U-Unabhängigkeit.*

Sind nämlich die $a, a_1, \ldots, a_n$ p-unabhängig in K, also $\varepsilon K - K^p$, und wäre etwa a U-abhängig von den $a_1, \ldots, a_n$, so gälte für ein bestimmtes e $a^{p^{-1}} \varepsilon K(a_1^{p^{-e}}, \ldots, a_n^{p^{-e}})$, was der Tatsache widerspricht, daß nach Satz 18 $K(a_1^{p^{-e}}, \ldots, a_n^{p^{-e}}, a^{p^{-1}})$ die Vielfachheit $n+1$ hat.

Jedoch zieht eine U-Abhängigkeit i. a. nicht die entsprechende p-Abhängigkeit nach sich: Sind a, b in K p-unabhängig, so ist zwar b von a und ab^p U-abhängig, jedoch nicht p-abhängig. Daß schließlich eine U-unabhängige Menge von mehr als einem Element nicht immer p-unabhängig zu sein braucht, wird am besten durch den in Satz 42 behandelten Fall einer Menge von zwei Elementen klargestellt. Führen wir den größten vollkommenen Unterkörper W_K von K ein, so läßt sich noch aussprechen

Satz 47. *Eine algebraische Abhängigkeit über W_K von Elementen aus $K - K^p$ zieht die entsprechende U-Abhängigkeit nach sich.*

Denn ist a algebraisch über $W_K(a_1, \ldots, a_n)$, so ist es separabel über $W_K(a_1, \ldots, a_n)_{(a_1, \ldots, a_n)}$, da dieser Körper vollkommen ist. Also ist auch $W_K(a, a_1, \ldots, a_n)_{(a_1, \ldots, a_n)}$ vollkommen:
$a^{p^{-n}} \varepsilon W_K(a, a_1, \ldots, a_n)_{(a_1, \ldots, a_n)}$, d. h. $K_{(a)} \subseteq K_{(a_1, \ldots, a_n)}$, w. z. b. w.

Bezeichnen wir zwei gegenseitig voneinander U-abhängige Mengen als *U-äquivalent*, so folgt aus der allgemeinen Theorie der Abhängigkeit, daß es zu jeder Menge $M \subseteq K - K^p$ U-äquivalente, U-unabhängige Mengen gibt, die wir als *U-Basen* bezeichnen; diese haben alle dieselbe Mächtigkeit, die die *U-Länge* von M genannt werden soll. Betrachten wir die durch M erzeugte rein-unendliche Erweiterung $L = K_{(M)}$, so wollen wir in diesem Sinne von den U-Basen und U-Längen der Erweiterung $L|K$ sprechen. Wir müssen dabei die Möglichkeit in Betracht ziehen, daß zu einer Erweiterung verschiedene U-Längen gehören, denn aus $K_{(M)} = K_{(N)}$ folgt ja auf Grund des auf Seite 123 angegebenen Beispiels noch nicht die U-Äquivalenz von M und N. Als *U-Grad* von $L|K$ definieren wir daher das Minimum der U-Längen, also die kleinste Mächtigkeit, die eine Menge M mit $L = K_{(M)}$ haben kann. Wissen wir jedoch, daß *eine* U-Länge endlich ist, so können wir schließen, daß alle andern den gleichen Wert haben. Da ferner nach Satz 47 jedes Element von $K - K^p$ U-abhängig ist von einer Transzendenzbasis für $K|W_K$, so gilt für die U-Längen und damit auch für die U-Grade n aller über K rein-unendlichen Erweiterungen die Abschätzung

$$n \leqq t_K \tag{55}$$

mit t_K als Transzendenzgrad von $K|W_K$. Für den U-Grad n der kleinsten vollkommenen Erweiterung von K gilt trivialerweise

$$n \leqq \mathrm{Uvg}(K). \tag{56}$$

Nach Satz 46 ist sogar eine p-Basis von K eine U-Basis für den kleinsten vollkommenen Erweiterungskörper von K. Daß (56) eine Verschärfung von (55) bedeutet, geht aus der Ungleichung

$$\mathrm{Uvg}(K) \leqq t_K \tag{57}$$

hervor. Sie wurde von Teichmüller [15, S. 369] aus der Tatsache erschlossen, daß aus der p-Unabhängigkeit in K die algebraische Unabhängigkeit über W_K folgt. Dieser Zusammenhang ergibt sich übrigens hier sofort aus unseren Sätzen 46 und 47. Ferner enthält der später zu beweisende Satz 50 die Ungleichung (57) als Spezialfall, wenn man beachtet, daß der Uvg einer rein-transzendenten Erweiterung eines vollkommenen Körpers gleich dem Transzendenzgrad ist [15, S. 370]. Ob es eine Erweiterung vom U-Grad n gibt, für die (56) nicht gilt, oder ob allgemein (55) durch (56) ersetzt werden kann, konnte nicht entschieden werden. Bei endlichem $\mathrm{Uvg}(K)$ sind jedenfalls alle Elemente von $K - K^p$ U-abhängig von einer p-Basis von K. In diesem Falle gilt daher nicht nur (56) für die U-Grade, sondern es stimmen darüber hinaus alle U-Längen einer Erweiterung überein.

Die im nächsten Paragraphen behandelten Beispiele für endlichen $\mathrm{Uvg}(K) < t_K$ zeigen, daß aus der algebraischen Unabhängigkeit über W_K i. a. nicht die U-Unabhängigkeit in K folgt; denn eine in $K - K^p$ liegende Transzendenzbasis von $K|W_K$ ist ja in diesem Falle U-abhängig

von einer p-Basis von K, also einer Menge von kleinerer Elementezahl. Daher kann also Satz 47 nicht umgekehrt werden. Die Nichtumkehrbarkeit von Satz 46 führt noch zu der Frage, ob nicht immer zu einer U-unabhängigen Menge wenigstens eine U-äquivalente, p-unabhängige Menge gefunden werden kann. Für $\mathrm{Uvg}(K) = 2$ ist dies zu bejahen, denn da eine p-Basis zugleich U-Basis für $K - K^p$ ist, ist jede U-unabhängige Menge von zwei Elementen zu ihr U-äquivalent. Für $\mathrm{Uvg}(K) = 3$ jedoch können wir bereits ein Gegenbeispiel angeben: Wir nehmen den rationalen Funktionenkörper $K = P_p(u, v, w)$ und die aus u und $x = v^p + uw^p$ bestehende, leicht als U-unabhängig nachzuweisende Menge. Irgendein von u, x U-abhängiges y liegt nun wegen $K_{(y)} \subseteq K_{(u,x)} = L$ in $W_{(L)}$. Da aber L durch Adjunktion von v aus dem vollkommenen Körper $P_p(u, x)_{(u,x)}$ entsteht, ist dieser $= W_{(L)}$. Bis auf einen in u, v^p, w^p rationalen Nenner ist also y ein Polynom $f(u^{p^{-n}}, x^{p^{-n}})$ mit Koeffizienten aus P_p und minimalem n. Dieses muß aber wegen $y \varepsilon K$ auch Polynom in u, v, w sein, weshalb $n \leqq 1$ ist. Daraus ergibt sich mit $z = u^{p-1}$

$$f = \sum_{i,k=0}^{N} a_{ik} z^i (v + zw)^k \qquad (a_{ik} \varepsilon P_p)$$
$$= \sum_{n=0}^{2N} z^n \sum_{i,k} \binom{k}{n-i} a_{ik} w^{n-i} v^{i+k-n}.$$

Da hierin aber nur Potenzen von z^p auftreten dürfen, ergibt sich aus der algebraischen Unabhängigkeit von v und w $a_{ik} = 0$ für $i \not\equiv 0\,(p)$ sowohl wie für $i \equiv 0\,(p)$ und $k \not\equiv 0\,(p)$, wenn wir $n = i$ bzw. $n = i+1$ betrachten. Also ist f Polynom in u, v^p, w^p und y ist p-abhängig von u.

Die Bedeutung des U-Grades für die Struktur der rein-unendlichen Erweiterungen ergibt sich aus

Satz 48. *Für eine rein-unendliche Erweiterung vom U-Grad n gilt*

$$\mathrm{Uvg}(L) + n \geqq \mathrm{Uvg}(K) \tag{58}$$

und, falls Uvg(K) endlich oder $n \leqq \aleph_0$ ist,

$$\mathrm{Uvg}(L) + n = \mathrm{Uvg}(K). \tag{59}$$

Zum Beweis wird eine Menge $M \subset K$ der Mächtigkeit n mit $L = K_{(M)}$ so ausgewählt und wohlgeordnet — wobei $M_\mu \subseteq M$ $(\mu \leqq \nu,\ M_\nu = M)$ ähnlich dem Abschnitt $< \mu$ der Reihe der Ordnungszahlen werde —, daß mit der Abkürzung $K_{(M_\mu)} = L_\mu$ stets $L_\mu \subset L_{\mu+1}$ gilt. Dies ist trivialerweise möglich. Nach Wahl einer wohlgeordneten p-Basis B von K konstruieren wir nun eine wohlgeordnete Menge von bzw. in L_μ p-unabhängigen Untermengen $B_\mu (\mu \leqq \nu)$ von B durch die transfinite Rekursion:

a) $B_1 = B$

b) $\mu = \lambda + 1$. Mit $M_\mu = \{a\} + M_\lambda$ ist nach Voraussetzung über M $K_{(a)}$ nicht Unterkörper von L_λ, sodaß a bez. L_λ einen Erweiterungsexponenten e hat. Dann ist eine Fallunterscheidung notwendig:

1. $a^{p^{-e}}$ ist in L_λ p-abhängig von B_λ. Es gibt also ein Polynom f aus $L_\lambda^p[z_1, \ldots, z_m]$, daß in jeder Unbestimmten einen nichtverschwindenden Grad $< p$ besitzt, so daß $a^{p^{-e}} = f(b_1, \ldots, b_m)$, $b_i \varepsilon B_\lambda$ gilt. f sowohl wie die b_i sind dabei eindeutig durch $a^{p^{-e}}$ bestimmt, da sonst B_λ nicht p-unabhängig wäre. Es sei b das in der Wohlordnung von B erste der b_i. Dann ist $\{a^{p^{-e}}\} + B_\lambda - \{b\}$ in B_λ p-unabhängig und daher auch $B_\mu = B_\lambda - \{b\}$ in $L_\mu = L_{\lambda(a^{p^{-e}})}$, da eine p-Abhängigkeit als zwischen endlich vielen Elementen bestehend ja schon in einem über L_λ endlichen Zwischenkörper $L_\lambda(a^{p^{-e-s}})$ stattfinden müßte, was nach Satz 9 unmöglich ist.

2. $a^{p^{-e}}$ ist in L_λ p-unabhängig von B_λ. Wie bei 1. ergibt sich nach Satz 9 die p-Unabhängigkeit von B_λ auch in L_μ, so daß wir $B_\mu = B_\lambda$ setzen können.

c) $\mu = \lim_{\lambda < \mu} \lambda$. B_μ gleich dem Durchschnitt aller B_λ mit $\lambda < \mu$ gesetzt ist p-unabhängig in L_μ, denn eine p-Abhängigkeit als zwischen endlich vielen Elementen bestehend müßte schon in einem gewissen $L_\iota (\iota < \mu)$ stattfinden, was wegen der p-Unabhängigkeit von B_ι in L_ι unmöglich ist.

Wir beweisen nun durch transfinite Induktion, daß M_μ für $\mu \leqq \nu$ eindeutig so auf $B - B_\mu$ abgebildet werden kann, daß das Bild von $x \varepsilon M_\mu$ in B unabhängig vom Index μ ist. Für a) ist nichts zu beweisen. Für b) wird im ersten Fall $M_\mu \to B - B_\mu$ in der geforderten Weise durch $M_\lambda \to B - B_\lambda$, $a \to b$ bewerkstelligt, da $B - B_\lambda + \{b\} = B - B_\mu$ ist, und im zweiten Fall neben $M_\lambda \to B - B_\lambda = B - B_\mu$ durch die Festsetzung, daß a auf das in der Wohlordnung von B erste Element von $B - B_\mu$ abgebildet werde. Für c) liefern die Abbildungen $M_\lambda \to B - B_\lambda$ zusammengenommen eine der gestellten Forderung genügende Abbildung von M_μ auf die Vereinigungsmenge der $B - B_\lambda$ $(\lambda < \mu)$, die ja mit der Menge der nicht im Durchschnitt der B_λ $(\lambda < \mu)$ liegenden Elemente von B, also mit $B - B_\mu$ zusammenfällt. Wegen der Abbildung von $M = M_\nu$ auf $B - B_\nu$ ist nun die Mächtigkeit n von M vermehrt um die Mächtigkeit von B_ν nicht kleiner als die Mächtigkeit $\mathrm{Uvg}(K)$ von B, womit wegen der p-Unabhängigkeit von B_ν in $L = L_\nu$ die Ungleichung (58) bewiesen ist. Setzen wir speziell n als endlich voraus, so kommt c) nicht vor. Durch vollständige Induktion beweist man daher, daß B_μ sogar p-Basis von L_μ und die Abbildung $M_\mu \to B - B_\mu$ umkehrbar eindeutig ist: Bei b) scheidet nämlich nach Induktionsvoraussetzung der zweite Fall aus; im ersten Fall aber ist $\{a^{p^{-e}}\} + B_\mu$ p-Basis von L_λ, weil b nach Abhängigkeitsaxiom III von dieser Menge p-abhängig ist, und daher gilt $L_\mu^p(B_\mu) = L_\lambda^p(a^{p^{-e}})_{(a^{p^{-e}})}(B_\mu) = L_{\lambda(a^{p^{-e}})} = L_\mu$. Auf Grund dieser Verschärfung erhalten wir entsprechend unserer Herleitung von (58) bei endlichem n die Gleichung (59). Ist $\mathrm{Uvg}(K)$ endlich, so kann n nicht unendlich sein, da sonst $L|K$ einen

Zwischenkörper von endlichem U-Grad $> \mathrm{Uvg}(K)$ besäße, was dem eben Bewiesenen widerspräche. Also ist (59) auch für endlichen $\mathrm{Uvg}(K)$ richtig. Bei $n = \aleph_0$ muß $\mathrm{Uvg}(K)$ unendlich, also $\geqq n$ sein. Da nach Satz 44 $\mathrm{Uvg}(L) \leqq \mathrm{Uvg}(K)$ ist, ergibt sich daraus $\mathrm{Uvg}(L) + n \leqq 2\,\mathrm{Uvg}(K) = \mathrm{Uvg}(K)$, also in Verbindung mit (58) wieder (59).

Aus dem letzten Teil des Beweises erkennen wir sofort, daß die zu vermutende allgemeine Gültigkeit von (59) gleichbedeutend ist mit der Richtigkeit von (56) für die U-Grade. Selbst (59) gestattet aber i. a. nicht die eindeutige Bestimmung von $\mathrm{Uvg}(L)$ aus n und $\mathrm{Uvg}(K)$. Daß eine solche i. a. tatsächlich unmöglich ist, zeigen etwa die beiden Erweiterungen $L_1 = K_{(x_1, x_2, \ldots)}$ und $L_2 = K_{(x_2, x_3, \ldots)}$ der rein-transzendenten Erweiterung $K = P_p(x_1, x_2, \ldots)$ von P_p mit $n_1 = n_2 = \mathrm{Uvg}(K) = \aleph_0$ aber $\mathrm{Uvg}(L_1) = 0$, $\mathrm{Uvg}(L_2) = 1$. Bezüglich (56) können wir sagen, daß jedenfalls für die U-Grade keine kleinere obere Schranke als $\mathrm{Uvg}(K)$ möglich ist, denn es gilt

Satz 49. *Der U-Grad des kleinsten vollkommenen Oberkörpers von K ist gleich $Uvg(K)$.*

Wie bei (56) bemerkt, ist diese Ungleichung in unserm Fall erfüllt. Aus (58) mit $\mathrm{Uvg}(L) = 0$ folgt aber $n \geqq \mathrm{Uvg}(K)$, d. h. $n = \mathrm{Uvg}(K)$, w. z. b. w. Mit Hilfe dieses Ergebnisses gelingt der Beweis des für endlichen $\mathrm{Uvg}(K)$ bereits von Becker und MacLane [1] hergeleiteten

Satz 50. *Bei algebraischem $L|K$ ist $Uvg(L) \leqq Uvg(K)$.*

Wir bemerken zuerst, daß wir uns wegen der Unveränderlichkeit des Uvg bei separablen Erweiterungen (s. S. 11) auf rein-inseparable Erweiterungen beschränken können. Dann ist der kleinste vollkommene Oberkörper $V = K_{(B)}$ von K (mit B als p-Basis von K) zugleich auch der kleinste vollkommene Oberkörper von L, und es gilt $V = L_{(B)}$. Der U-Grad von $V|L$ ist also nicht größer als die Mächtigkeit $\mathrm{Uvg}(K)$ von B. Damit ist wegen Satz 49 die Behauptung bewiesen. Als eine einfache Anwendung davon zeigen wir noch

Satz 51. *Hat die algebraische Erweiterung $L|K$ einen Exponenten, so ist $Uvg(L) = Uvg(K)$.*

O. B. d. A. können wir wieder $L|K$ als rein-inseparabel annehmen, so daß $L \subseteq K^{p^{-e}} = K'$ ist. Wegen $K \cong K'$ gilt natürlich $\mathrm{Uvg}(K) = \mathrm{Uvg}(K')$, so daß die aus Satz 50 folgende Ungleichung $\mathrm{Uvg}(K') \leqq \mathrm{Uvg}(L) \leqq \mathrm{Uvg}(K')$ die Behauptung ergibt.

§ 10.

Halbendliche Erweiterungen.

Bilden wir für eine rein-inseparable Erweiterung $L|K$ die Menge $M \subseteq K - K^p$ der Elemente ohne Erweiterungsexponenten bez. L, so ist — vom Ausnahmefall $M = 0$ abgesehen — die rein-unendliche Erweiterung $Z = K_{(M)}$ Zwischenkörper. Jedes Element $a \in Z - Z^p$ besitzt

nun einen Erweiterungsexponenten bez. L, denn sonst wäre mit e als Exponent von a bez. K $a^{p^e} \varepsilon M \subset Z^{p^{e+1}}$, $a \varepsilon Z^p$. Diese Eigenschaft von $L|Z$ führt uns zur Definition: Eine rein-inseparable Erweiterung $L|K$ ist *halbendlich*, wenn jedes Element von $K - K^p$ einen Erweiterungsexponenten bez. L hat. Der Name ist deshalb gewählt, weil speziell die Erweiterungen mit Exponenten und damit die endlichen Erweiterungen diese Eigenschaft besitzen. Der oben konstruierte Körper Z ist nun als der *maximale rein-unendliche Zwischenkörper* von $L|K$ zu bezeichnen, da er jeden über K rein-unendlichen Zwischenkörper enthält. Es gilt

Satz 52. *Der maximale rein-unendliche Zwischenkörper einer rein-inseparablen, nicht halbendlichen Erweiterung von K ist der einzige über K rein-unendliche Zwischenkörper, über dem die Erweiterung halbendlich ist.*

Denn ist $U = K_{(N)} \subset Z = K_{(M)}$, so besitzt mindestens ein Element $a \varepsilon M$ einen Erweiterungsexponenten e bez. U: $b = a^{p^{-e}} \varepsilon U - U^p$. Da aber a keinen Erweiterungsexponenten bez. L besitzt, hat auch b keinen, d. h. $L|U$ ist nicht halbendlich, w. z. b. w. Jede nicht halbendliche, rein-inseparable Erweiterung läßt sich also auf genau eine Weise als halbendliche Erweiterung einer rein-unendlichen aufbauen. Als U-Grad der Erweiterung bezeichnen wir dabei den U-Grad von $Z|K$, während wir den halbendlichen Erweiterungen den U-Grad Null beilegen. Strukturfragen unendlicher rein-inseparabler Erweiterungen lassen sich immer auf solche über rein-unendliche und über halbendliche zurückführen. Daher wenden wir uns im Folgenden den halbendlichen Erweiterungen zu.

Eine einfache Charakterisierung der halbendlichen Erweiterungen mittels des auf Seite 124 eingeführten größten vollkommenen Unterkörpers liefert

Satz 53. *Die rein-inseparable Erweiterung $L|K$ ist dann und nur halbendlich, wenn $W_{(L)} = W_{(K)}$ gilt.*

Dies folgt sofort daraus, daß mit M als der Menge der Elemente von $K - K^p$ ohne Erweiterungsexponent bez. L die Gleichung

$$W_L = W_K(M)_{(M)} \tag{60}$$

gilt. Zum Beweis von (60) beachten wir, daß $W_K(M)_{(M)}$ als vollkommener Unterkörper von L in W_L enthalten ist. Andererseits liegt ein Element von W_L entweder in W_K oder aber eine gewisse p^e-te Potenz ($e \gtreqless 0$) davon in $K - K^p$ und damit in M. Daraus schließen wir $W_L \subseteq W_K(M)_{(M)}$. Bei Verwendung von Satz 53 zum Nachweis der Halbendlichkeit braucht natürlich nur $W_L \subseteq W_K$ bewiesen zu werden, da $W_K \subseteq W_L$ trivialerweise immer erfüllt ist.

Mit T als Transzendenzbasis von $K|W_K$ und S als m. s. Zk. von $K|W_K(T)$ ist nach Satz 53 $K|S$ halbendlich. Diese Bemerkung liefert

uns Beispiele für halbendliche Erweiterungen ohne Exponenten: Mit $K = k\{x\}$ als Potenzreihenkörper über dem vollkommenen Körper k ist $K|S$ halbendlich, aber zufolge Satz 51 ohne Exponent, denn nach Teichmüller [15, S. 371] ist $\mathrm{Uvg}(S) = t_K > 1 = \mathrm{Uvg}(K)$. Die so mit Potenzreihenkörpern gebildeten Beispiele haben aber den Nachteil, daß sie in ihrem Aufbau nicht explizit gegeben sind. Außerdem besitzen ihre Grundkörper alle unendlichen Uvg, was hervorgeht aus dem die Verwendung des F. K. Schmidtschen Lückensatzes [12, S. 23] zum Nachweis von $t_K > 1$ erübrigenden

Satz 54. *Der Transzendenzgrad von $k\{x\}|k$ ist $> \aleph_0$.*

Genügt nämlich die Elementezahl m von k der Bedingung

$$m < m^{\aleph_0}, \tag{61}$$

so hat $k\{x\}|k$ den Transzendenzgrad $t = m^{\aleph_0}$, da die Elementezahl von $k\{x\}$ einerseits gleich dem Maximum von m, t und $\aleph_0$, andererseits aber gleich $m^{\aleph_0}$ ist. Gilt aber (61) nicht, so folgt $m > \aleph_0$. Wir betrachten dann diejenigen Potenzreihen, die über k von vorgegebenen abzählbar vielen Potenzreihen, deren Koeffizienten wir in der Folge $a_1, a_2, \ldots$ anordnen, algebraisch abhängen. Die Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots$ einer solchen Potenzreihe w sind nun über dem Primkörper P von k algebraisch abhängig von den $a_1, a_2, \ldots$ und den in der algebraischen Gleichung $F(w) = 0$ noch auftretenden Elementen $c_1, \ldots, c_N \; \varepsilon k$. Nehmen wir nämlich einmal im Gegenteil an, eine nichtleere Teilmenge $v_1, v_2, \ldots$ der u_i sei algebraisch unabhängig und alle anderen u_i von ihr algebraisch abhängig über $k' = P(c_1, \ldots, c_N, a_1, a_2, \ldots)$. Mit $k''|k'$ als irgendeiner rein-transzendenten Erweiterung vom Transzendenzgrad $\aleph_0$, über der x noch transzendent ist, können wir nun die $v_1, v_2, \ldots$ auf unendlich viele verschiedene Weisen durch über k' algebraisch-unabhängige Elemente von k'' ersetzen. So erhalten wir aus w unendlich viele verschiedene Potenzreihen aus $k''\{x\}$, die alle der Gleichung $\mathrm{F} = 0$ genügen, was aber unmöglich ist. Somit ist der Transzendenzgrad von $P(a_1, a_2, \ldots; u_1, u_2, \ldots)|P(a_1, a_2, \ldots)$ endlich, nämlich $\leqq N$. Wegen $m > \aleph_0$ hat aber $k|P$ einen Transzendenzgrad $> \aleph_0$, so daß es in k eine Folge $u_1', u_2', \ldots$ über $P(a_1, a_2, \ldots)$ algebraisch unabhängiger Elemente gibt. Die mit den u_i' als Koeffizienten gebildete Potenzreihe ist dann keine Potenzreihe w. Da wir von einer beliebigen abzählbaren Menge von Potenzreihen ausgegangen sind, ist damit $t > \aleph_0$ bewiesen.

Einen Einblick in die Kompliziertheit der Erweiterungen $K|S$ unserer Beispiele gibt

Satz 55. *Eine algebraische Erweiterung $L|K$ mit*

$$Uvg(K) > \aleph_0 \geqq Uvg(L)$$

kann nicht durch Adjunktion von abzählbar vielen Elementen erzeugt werden.

Setzen wir nämlich einmal im Gegenteil $L = K(M)$ mit abzählbarem M voraus. Ist dann B eine p-Basis von L, so kann jedes Element von L und damit erst recht jedes Element von K als Polynom in endlich vielen Elementen von $B+M$ mit Koeffizienten aus K^p geschrieben werden. K ist also enthalten in der Vereinigung aller $K^p(N)$, wenn N die höchstens abzählbar unendlich vielen endlichen Teimengen von $B+M$ durchläuft. Bilden wir zu jedem Körper $K \cap K^p(N)$ eine p-Basis, so enthält deren Vereinigungsmenge demnach eine p-Basis von K. Es gibt also wegen $\mathrm{Uvg}(K) > \aleph_0$ ein N mit $\mathrm{Uvg}(K \cap K^p(N)) > \aleph_0$. In diesem Körper $K \cap K^p(N)$ wählen wir nun eine unendliche, p-unabhängige Menge A aus. Diese ist nach Konstruktion in $Z = K(N)$ p-abhängig von der Menge $N = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Das ist aber unmöglich. Ist nämlich $\beta = b_1^{p^e} \varepsilon K - K^p$ in K p-unabhängig von A, so ist nach Satz 9 A auch in $K(b_1)$ p-unabhängig. Im entgegengesetzten Falle ist β nach passender Wahl der $a_i \varepsilon A$ p-abhängig von $a_1, \ldots, a_m$, aber nicht von $a_2, \ldots, a_m$. Nach Abhängigkeitsaxiom III ist dann a_1 p-abhängig von $\beta, a_2, \ldots, a_m$. Wegen der p-Unabhängigkeit von A ist also β p-unabhängig von $A - \{a_1\}$ und daher diese Menge nach Satz 9 p-unabhängig in Z. Durch n-fache Anwendung dieses Verfahrens gewinnen wir eine in Z p-unabhängige unendliche Teilmenge von A, weshalb A in Z nicht von N p-abhängig sein kann.

Eine im Gegensatz zu den bisher betrachteten zugleich in ihrem Aufbau explizit angebbaren halbendlichen Erweiterungen ohne Exponenten hat bei $\mathrm{Uvg}(K) = 2$ MacLane [8, S. 389—392] konstruiert: k sei irgendein vollkommener Körper, $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ eine abzählbare Menge von über k unabhängigen Elementen, u, v algebraisch unabhängig über $Q = k(Z)_{(Z)}$ und

$$u_n = v^{p^{n-1}} + z_n u_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ u_0 = u); \tag{62}$$

dann ist mit

$$M = Q(v, u, u_1^{p^{-1}}, u_2^{p^{-2}}, \ldots)$$

$M|Q(u, v)$ halbendlich und $\mathrm{Uvg}(M) = 1$, denn nach MacLane ist $W_{(M)} = Q$, und $\{v\}$ ist eine p-Basis von M. Dieses Beispiel zeigt zugleich, daß über einem Körper von endlichem Uvg durchaus nicht jede halbendliche Erweiterung endlich sein muß. Diese Tatsache überrascht, da in zwei häufigen Sonderfällen keine unendlichen halbendlichen Erweiterungen auftreten. Einmal ist nämlich wegen (6) bei endlichem $\mathrm{Uvg}(K)$ jede rein-inseparable Erweiterung von K mit Exponent endlich. Zum andern sind bei $\mathrm{Uvg}(K) = 1$ die Körper $K^{p^{-e}}$ $(e = 1, 2, \ldots)$ die einzigen endlichen rein-inseparablen Erweiterungen von K [13, S. 371[, deren über K rein-unendliche Vereinigung also die einzige unendliche rein-inseparable Erweiterung von K.

In den angegebenen Beispielen für halbendliche Erweiterungen ohne Exponenten war der Uvg der Erweiterung immer kleiner als der des

Grundkörpers. Daß dies durchaus nicht immer der Fall zu sein braucht, zeigt über einem K mit $\mathrm{Uvg}(K) \geqq \aleph_0$ und den p-unabhängigen Elementen $a_1, a_2, \ldots$ die Erweiterung $L = K(b_1, b_2, \ldots)$, wenn $b_i^{p^{n_i}} = a_i$ gilt und die Folge der n_i unbeschränkt ist. Ergänzen wir $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ durch A' zu einer p-Basis von K, so ergibt sich durch mehrmalige Anwendung von Satz 9, daß $\{b_1, \ldots, b_k\} + A'$ in $K(b, \ldots, b_k)$ und damit $B + A' = \{b_1, b_2, \ldots\} + A$ in L p-unabhängig ist. Wegen $L = K^p(A, A', B) = K^p(A', B) = L^p(A', B)$ ist also $B + A'$ p-Basis von L und somit $\mathrm{Uvg}(L) = \mathrm{Uvg}(K)$. Enthielte nun $L|K$ eine rein-unendliche Erweiterung $Z|K$, so müßte nach dem beim Beweis von Satz 44 Gesagten eine Teilmenge von $A + A'$ p-Basis von Z sein, die wir mit $\bar{A} \subseteq A$, $\bar{A}' \subseteq A'$ als $\bar{A} + \bar{A}'$ schreiben. Mit $\bar{B}$ als der $\bar{A}$ entsprechenden Teilmenge von B ergibt sich wie oben $\bar{B} + \bar{A}'$ als p-Basis von $L' = Z(\bar{B}) \subseteq L$. Nach Satz 8 muß Menge wegen der p-Unabhängigkeit dieser in L dann $L = L'$, also auch $\bar{B} + \bar{B}' = B + A'$ und damit $\bar{A} + \bar{A}' = A + A'$ sein. Das ist aber wegen der Inseparabilität von $Z|K$ nach Satz 8 nicht möglich. Also ist — wenn wir noch die Unbeschränktheit der n_i beachten — die Erweiterung $L|K$ halbendlich ohne Exponent. Daß wir zur Konstruktion dieses Beispieles einen Körper von unendlichem Uvg benötigten, erklärt sich aus dem bereits von Becker uud MacLane [1, Theorem 4] bewiesenen

Satz 56. *Eine rein-inseparable Erweiterung $L|K$ mit $Uvg(L) = Uvg(K) < \aleph_0$ ist endlich.*

Wir wollen hier einen Beweis durch vollständige Induktion nach $\mathrm{Uvg}(K) = n$ geben. Für $n = 1$ ist, wie schon weiter oben bemerkt, der kleinste vollkommene Oberkörper von K die einzige unendliche rein-insepararable Erweiterung, die Behauptung also richtig. Zum Schluß von n auf $n+1$ nehmen wir $\mathrm{Uvg}(K) = n + 1$ an. O. B. d. A. können wir voraussetzen, daß K nicht in L^p enthalten ist; denn wegen $\mathrm{Uvg}(L) = \mathrm{Uvg}(K)$ gibt es ein maximales e mit $K^{p^{-e}} \subset L$, und der Übergang zum neuen Grundkörper $K^{p^{-e}}$ ändert weder an Voraussetzung noch Behauptung etwas. Mit $a \varepsilon K - K \cap L^p$ bilden nun die $a^{kp^{-i}}$ — mit $i = 1, 2, \ldots, k = 0, 1, \ldots, k \not\equiv 0 \,(p)$ für $k > 0$ — eine Basis von $L_{(a)}|L$ sowohl wie von $K_{(a)}|K$, sodaß eine Basis von $L|K$ auch eine solche von $L_{(a)}|K_{(a)}$ ist. Nach Satz 48, Gl. (59) ist aber $\mathrm{Uvg}(L_{(a)}) = \mathrm{Uvg}(K_{(a)}) = n$, also $L_{(a)}|K_{(a)}$ nach Induktionsvoraussetzung endlich. Daher ist auch $L|K$ endlich, w. z. b. w.

Die so als Kriterium für Endlichkeit auftretende Gleichheit der Unvollkommenheitsgrade besitzt in einem Spezialfall auch Interesse für die Theorie der separierenden Transzendenzbasen [8]:

Satz 57. *Ein Körper mit endlichem $t_{(K)}$ besitzt über $W_{(K)}$ dann und nur dann eine separierende Transzendenzbasis, wenn $Uvg(K) = t_{(K)}$ ist.*

Nach Theorem 13 bei MacLane [8] ist nämlich die Existenz einer separierenden Transzendenzbasis gleichbedeutend mit der Existenz

einer in K p-unabhängigen Transzendenzbasis. Diese Bedingung ergibt mit (57) zusammen $\mathrm{Uvg}(K) = t_K$, und umgekehrt ist in diesem Falle wegen der Endlichkeit von t_K jede p-Basis von K auch Transzendenzbasis.

Eine merkwürdige Eigenschaft der halbendlichen Erweiterungen ist es, daß das Kompositum von halbendlichen Erweiterungen eines Körpers nicht wieder halbendlich zu sein braucht. Als Beispiel nehmen wir mit vollkommenem k und darüber algebraisch unabhängigen $x, x_1, \ldots$ den Körper $K = k(x, x_1, x_2, \ldots)$ und seine Erweiterungen $L = K(\ldots, (x x_n)^{p^{-n}}, \ldots)$, $M = K(\ldots, x_n^{p^{-n}}, \ldots)$, die beide nach den Ausführungen von Seite 132 halbendlich sind, und erhalten $LM = M_{(x)} = L_{(x)}$. Diese Erscheinung tritt sogar bei endlichem $\mathrm{Uvg}(K)$ auf: Mit $K = Q(u, v)$ bilden wir neben dem M des Mac Laneschen Beispiels noch die durch Vertauschung von u und v entstehende, ebenfalls halbendliche Erweiterung $L = Q(u, v, v_1^{p^{-1}}, v_2^{p^{-2}}, \ldots)$. Nach (62) gilt dann

$$u_n = v^{p^{n-1}} + z_n v^{p^{n-2}} + \ldots + z_n \ldots z_2 v + z_n \ldots z_1 u \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{63}$$

sowie die durch Vertauschen von u und v daraus entstehende Gleichung. Aus beiden zusammen folgt nach Potenzieren mit p^{-n}

$$u^{p^{-n}} \varepsilon L M (u^{p^{-n+1}}, v^{p^{-n+1}}),\ v^{p^{-n}} \varepsilon L M (u^{p^{-n+1}}, v^{p^{-n+1}}),$$

und sukzessive Anwendung dieser Beziehungen liefert, da trivialerweise $LM \subseteq K_{(u,v)}$ ist, $LM = K_{(u,v)}$. Hier ist sogar das Kompositum zweier halbendlicher Erweiterungen rein-unendlich. Besitzt jedoch eine der beiden ein Kompositum bildenden halbendlichen Erweiterungen einen Exponenten, so ist das Kompositum halbendlich, da ja eine gewisse p^e-te Potenz desselben in der andern Erweiterung liegt. Sofort einzusehen ist noch, daß mit $M|L$ und $L|K$ auch $M|K$ halbendlich ist und umgekehrt, so daß die oben von uns betrachtete Erscheinung auch so zu charakterisieren ist: Bei halbendlicher Grundkörpererweiterung kann die Halbendlichkeit einer Erweiterung verloren gehen.

Das Mac Lanesche Beispiel zeigt noch, daß das Kompositum einer halbendlichen Erweiterung $M|K$ mit einer rein-unendlichen Erweiterung $L|K$ über L nicht notwendig ebenfalls halbendlich ist: Wir brauchen ja mit $K = Q(u, v)$ und dem oben erklärten M nur $L = K_{(v)}$ zu setzen und haben $LM = K_{(u,v)} = L_{(u)}$. Es gilt jedoch

Satz 58. *Ist $S|K$ separabel und $L|K$ halbendlich, so ist auch $LS|S$ halbendlich.*

Zum Beweis sei $a \varepsilon S - S^p$, $f(x)$ das irreduzible separable Polynom aus $K[x]$ mit $f(a) = 0$ und $g(x)$ das irreduzible separable Polynom aus $L[x]$ mit $g(a^{p^{-n}}) = 0$, falls $a^{p^{-n}} \varepsilon L S$. Da $L|K$ rein-inseparabel ist, erhalten wir für das irreduzible Polynom aus $K[x]$, dem $a^{p^{-n}}$ genügt, den Ausdruck $(g(x))^{p^e} = f(x^{p^n})$. Also ist $e = n$. Wäre nun n nicht beschränkt, so lägen wegen der Halbendlichkeit von $L|K$ die Koeffizienten von f alle in $W_{(K)}$. a wäre damit algebraisch über W_K, $W_{(K)}(a)$

daher vollkommen und also $a \varepsilon W_S$, was ja von vornherein ausgeschlossen war. — Ferner haben wir

Satz 59. *Ist $L|K$ halbendlich und $K' = K(X, Y)_{(Y)}$ mit über K algebraisch unabhängiger Menge $X + Y$, so ist $LK'|K'$ halbendlich.*

Zum Beweis gehen wir so vor: Zu jedem Element $a \varepsilon LK' = L(X, Y)_{(Y)}$ gibt es ein e_a, so daß sich a für jedes $e \geqq e_a$ bis auf einen Faktor aus L eindeutig als Quotient zweier teilerfremder Polynome in Elementen von $X + Y^{p^{-e}}$ mit Koeffizienten aus L darstellen läßt. Bei Änderung von e ändern sich in dieser Darstellung nur die Exponenten der Elemente von $Y^{p^{-e}}$. Liegt nun a in $W_{LK'}$, so ist a für jedes n die p^n-te Potenz eines Elementes $b_n \varepsilon LK'$. Mit $e \geqq \mathrm{Max}\,(e_a, e_{b_n})$ und $f, g, f_n, g_n \varepsilon L[X, Y^{p^{-e}}]$ haben wir dann $a = \frac{f}{g} = b_n^{p^n} = \left(\frac{f_n}{g_n}\right)^{p^n}$. Da mit f_n, g_n auch ihre p^n-ten Potenzen teilerfremd sind, stimmen die Polynome f, g bis auf einen Faktor c aus L mit den Polynomen $f_n^{p^n}$ bzw. $g_n^{p^n}$ überein: $c \cdot f = f_n^{p^n}$, $c \cdot g = g_n^{p^n}$. Danach liegen die Koeffizienten von cf und cg alle in $W_L = W_K$, und in f und g kommt kein Element aus X vor. Das bedeutet aber $a \varepsilon W_K(Y)_{(Y)} = W_{K'}$, also $W_{LK'} \subseteq W_{K'}$, womit nach Satz 50 die Halbendlichkeit von $LK'|K'$ nachgewiesen ist.

Mit Hilfe der Sätze 58 und 59 gelingt nun eine Verallgemeinerung des MacLaneschen Beispiels. Dies erscheint aus folgendem Grunde wünschenswert: Nähere Betrachtung zeigt, daß es für den Grundkörper K des betreffenden Beispiels vor allem wesentlich ist, ein W_K mit unendlichem absoluten Transzendenzgrad (= Transzendenzgrad über dem Primkörper P) zu besitzen; es liegt daher die Vermutung nahe, daß es bereits unter dieser Voraussetzung — neben der selbstverständlichen Bedingung $\mathrm{Uvg}(K) > 1$ — gelingt, über K eine unendliche halbendliche Erweiterung L zu konstruieren. Dieses Ziel erreichen wir hier allerdings nicht ganz, da wir noch die Existenz einer separierenden Transzendenzbasis von $K|W_K$ voraussetzen. Wegen $\mathrm{Uvg}(K) > 1$ kann eine solche, die ja zugleich p-Basis von K ist, als $\{u, v\} + X$ geschrieben werden. Eine Transzendenzbasis von $W_K|P$ sei ferner durch $Z + Y$ mit $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ gegeben. Wir setzen jetzt $Q = P(Z)_{(Z)}$ und bilden über $Q(u, v)$ die Erweiterung M des MacLaneschen Beispiels. Nach Satz 59 ist dann $MQ(u, v, X, Y)_{(Y)}|Q(u, v, X, Y)_{(Y)}$ halbendlich. Da der Körper $Q(Y)_{(Y)}$ vollkommen und W_K über ihm algebraisch ist, muß $W_K(u, v, X)$ und damit auch K über $Q(u, v, X, Y)_{(K)}$ separabel sein. Deshalb ist nach Satz 58 $MK|K$ halbendlich. Da es zu endlich vielen Elementen von K stets einen sie enthaltenden Zwischenkörper von $K|Q(u, v)$ mit einer separierenden Transzendenzbasis über $Q(u, v)$ gibt, ein rein-inseparables, irreduzibles Polynom aber weder durch reintranszendente, noch durch separable Erweiterung des Koeffizientenkörpers reduzibel wird, ist eine Basis von $M|Q(u, v)$ auch eine solche von $MK|K$. Diese Erweiterung ist also unendlich und in derselben

Weise erzeugt wie das MacLaneschen Beispiel. Somit haben wir in MK einen Körper L der gewünschten Art gewonnen. Da nach einer Bemerkung von Seite 133 eine Grundkörpererweiterung mit Exponent die Halbendlichkeit nicht zerstört, führt diese Konstruktion auch dann noch zum Ziel, wenn mit einem gewissen e K^{p^e} in einem Körper enthalten ist, der über W_K eine separierende Transzendenzbasis besitzt. Dann ist nach Satz 51 $\mathrm{Uvg}(K) = t_K$. In dem hauptsächlich interessierenden Fall endlichen Unvollkommenheitsgrades besitzt daher nach Satz 57 auch $K|W_K$ eine separierende Transzendenzbasis, so daß keine weitere Verallgemeinerung gewonnen ist.

(Eingegangen am 12. Februar 1948.)

Literaturverzeichnis.

M. T. Becker-S. MacLane.

[1] The minimum number of generators for inseparable algebraic extensions. Bull. Am. Math. Soc. 46 (1940), S. 182.

M. Deuring.

[2] Verzweigungstheorie bewerteter Körper. Math. Ann. 105 (1931).

[3] Algebren. Ergebn. d. Math. IV_1 (1935).

[4] Arithm. Theorie d. Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper I. Journal f. Math. 177 (1937).

N. Jacobson.

[5] Abstract derivation and Lie algebras. Transactions Am. Math. Soc. 42 (1937), S. 206.

W. Krull.

[6] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche VII. Math. Zeitschrift 45 (1939).

S. MacLane.

[7] Steinitz field towers for modular fields. Transact. Am. Math. Soc. 46 (1939).

[8] Modular fields I. Duke Math. Journal 5 (1939), S. 372.

A. Ostrowski.

[9] Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper. Math. Zeitschrift 39 (1935).

G. Pickert.

[10] Neue Methoden i. d. Strukturtheorie d. kommutativ-assoziativen Algebren. Math. Ann. 116 (1939).

[11] Veränderung des Unvollkommenheitsgrades bei unendlichen reininseparablen Erweiterungen. Bericht über die Mathematiker-Tagung in Tübingen vom 23. bis 27. Sept. 1946, S. 118.

F. K. Schmidt.
[12] Mehrfach perfekte Körper. Math. Ann. 108 (1933).
[13] Über die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen. Math. Zeitschrift 41 (1936).

E. Steinitz.
[14] Algebraische Theorie der Körper. Journal f. Math. 137 (1910).

O. Teichmüller.
[15] p-Algebren. Deutsche Math. 1 (1936).
[16] Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper. Journal f. Math. 176 (1937).

B. L. van der Waerden.
[17] Moderne Algebra I (1937).

Aus der Arbeit der Universität 1946/47

Herausgegeben von
Prof. D. **Hans Frhr. von Campenhausen**
Rektor der Universität 1946/47

(Schriften der Universität Heidelberg, drittes Heft)

Mit 63 Textabbildungen. III, 212 Seiten. 1948.
DMark 7.50

Inhaltsverzeichnis

I. Jahresfeier:

Rechenschaftsbericht des Prorektors Professor K. H. Bauer über das abgelaufene Amtsjahr.

Augustin und der Fall von Rom. Festvortrag und Immatrikulationsansprache des Rektors D. Frhr. v. Campenhausen.

II. Professorenvorträge:

Von den römischen Juristen. Von Wolfgang Kunkel.

Die Messung erdgeschichtlicher Zeiten. Von Ludwig Rüger.

Meisterwerke der ägyptischen Kunst. Von Hermann Ranke.

Die Bedeutung des Sauerstoffs für das Leben. Von Hubertus Strughold.

Vom Flug der Tiere und vom Menschenflug der Zukunft. Von Erich von Holst.

Der erste christliche Historiker. Von Martin Dibelius.

Die amerikanischen Hochschulen. Von Lt. Col. Irvin.

Humanismus — Heute? Von Otto Regenbogen.

Über Bereitschaft zum Krebs. Von H. v. Meyenburg.

Über die völkerrechtliche und staatsrechtliche Lage Deutschlands. Von Karl Geiler.

Rechtsschutz durch Verwaltungsgerichte. Von Walter Jellinek.

Vom Wesen und vom heutigen Stand der nationalökonomischen Theorie. Von Erich Preiser.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Physik

Ein Lehrbuch

Von

Wilhelm H. Westphal

Berlin

Dreizehnte Auflage

Mit 635 Abbildungen. XII, 696 Seiten. 1948.

Halbleinen DMark 27.—

Inhaltsübersicht

Einleitung — Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper — Physik der Stoffe — Wärmelehre — Elektrostatik — Elektrische Ströme — Magnetismus und Elektrodynamik — Optik und allgemeine Strahlungslehre — Relativitätstheorie — Quantentheorie. Atome und Moleküle. Kristalle — Astrophysik und Physik des Weltalls — Schlußwort — Sachverzeichnis.

Kleines Lehrbuch der Physik

ohne Anwendung höherer Mathematik

Von

Wilhelm H. Westphal

Berlin

Mit 283 Abbildungen. VIII, 251 Seiten. 1948.

Halbleinen DMark 9.60

Inhaltsübersicht

Einleitung — Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper — Mechanik der Stoffe — Wärmelehre — Elektrostatik. Elektrische Ströme — Magnetismus und Elektrodynamik — Die Lehre vom Licht und allgemeine Strahlungslehre — Die Atome — Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Veröffentlicht unter Zulassung Nr. 100 der Britischen Militärregierung.
Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg.
Druck: Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner, Göttingen. — Printed in Germany.